KAPITEL 7

PHILOSOPHISCHE AUSWIRKUNGEN DES VIERFARBENPROBLEMS

Genauso wie das Vierfarbenproblem über ein Jahrhundert die berühmtesten Mathematiker beschäftigt, ja fast schon infiziert hat, so wirft auch der Beweis des Vierfarbensatzes neue, faszinierende Probleme auf. Diese Probleme sind indes in jenem Grenzgebiet zwischen Philosophie und Mathematik angesiedelt, in dem Fragen nach dem Wesen der Mathematik, mathematischer Sätze und Beweise gestellt werden.

Es ist nicht die Absicht dieser Diskussion, eine erschöpfende Phänomenologie des mathematischen Beweises zu liefern. Es sollen lediglich diejenigen Aspekte des Beweises betrachtet werden, die Anlaß sein könnten, einige überkommene Ansichten über die Mathematik neu zu überdenken. Der Leser sei in diesem Zusammenhang verwiesen an Hakens "An Attempt to understand the Four Color Problem" (10) sowie an Tymoczkos Artikel "The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance" (18) und an Swarts exzellente Replik "The Philosophical Implications of the Four-Color Problem" (16).

Tymoczko zählt drei Hauptcharakteristika mathematischer Beweise auf:

(a) Beweise sind überzeugend.
(b) Beweise sind überprüfbar.
(c) Beweise sind formalisierbar.

In der Anthropologie der Mathematik liegt Charakteristikum (a) begründet: mathematische Aktivität ist menschliche Aktivität. Und nur weil Beweise für beliebige Mathematiker Überzeugungskraft haben, können sie in der mathematischen Gemeinschaft ihre Rolle als Entscheidungskriterien spielen. Ein Skeptizist aus der Schule Wittgensteins würde sogar sagen, daß ihre Überzeugungskraft für Mathematiker die einzige Eigenschaft von Beu isen sei. Beweise sind überzeugend: dies ist eine Tatsache, die weder erklärt werden kann noch einer Erklärung bedarf. Die meisten Philosophen suchen allerdings nach einer tiefergehenden Charakterisierung mathematischer Beweise, welche erklärt, warum Beweise überzeugend sind.

Wenn wir sagen, daß Beweise überprüfbar sind, so meinen wir damit, daß Mathematiker Beweise vollständig nachvollziehen können. Durch den Nachvollzug erwirbt sich der Mathematiker das Wissen, daß die Aussage, welche Gegenstand des Beweises ist, in der Tat richtig ist. Die Überprüfbarkeit eines Beweises ermöglicht es dem Mathematiker, diesen durch reine Verstandeskraft zu begreifen. Vor allem die Überprüfbarkeit verhilft mathematischen Sätzen in den Augen mancher Philosophen zu einer Gewißheit, welche in anderen Wissenschaften unerreichbar ist.

Ein Beweis kann deduktiv aus den Axiomen einer Theorie gewonnen werden, und zwar mit Hilfe dieser Axiome und den Regeln des logischen Schließens. Die meisten Mathematiker und Philosophen glauben, daß jeder Beweis auf diese Weise formalisiert werden kann. Man kann immer eine formale Sprache und Theorie finden, mit deren Hilfe ein informeller Beweis rigoros formalisiert werden kann.

Die Charakteristika (a), (b) und (c) sind nicht unabhängig voneinander. Beweise sind nur deshalb überzeugend, weil sie überprüfbar und formalisierbar sind.

Wie nimmt sich nun der Beweis des Vierfarbensatzes im Licht der genannten Beweischarakteristika aus? Ist der Beweis von Appel und Haken überzeugend? Manche Mathematiker bezweifeln dies, verhalten sich zumindest reserviert. Der Beweis scheint ihnen deshalb nicht überzeugend zu sein, weil er mit traditionellen Methoden nicht zu überprüfen ist. Die Möglichkeit, Wissen durch Nachvollzug zu erwerben, scheidet im Fall der Reduzibilitätsbeweise aus. Der Computer aber sei ein fehleranfälliges Werkzeug, und computergestützte Beweise seien daher gar keine Beweise im strengen Sinn.

Solche Einwände übersehen, daß Fehleranfälligkeit nichts computerspezifisches ist. Auch Papier und Bleistift sind letzten Ende Werkzeuge. Auch von Hand geführte Beweise können Fehler enthalten, die jahrelang verborgen bleiben. Kempes "Beweis" ist das beste Beispiel dafür. Fehlerhafte Implementierungen auf dem Computer sind <u>logische</u> Fehler, in keiner Weise verschieden von solchen Fehlern, die sich in "handgemachte" Beweise einschleichen. Auch computergestützte Beweise können überprüft werden, mit anderen Programmen auf anderen Computern. Der Autor glaubt mit der vorliegenden Arbeit ein Stück dieser Überprüfung geleistet zu haben. Im übrigen beweisen die vom Autor gefundenen Fehler, daß der von Hand ausgeführte Beweisteil (nämlich die Entladungsprozedur) Fehler enthält, während in den vom Computer ausgeführten Beweisteilen (Reduktionen) trotz Überprüfung durch mehrere unabhängig entwickelte Programme (Heesch, Allaire, Swart) kein Fehler gefunden worden ist.

Swart dreht den Spieß sogar um: er bezeichnet einen Menschen, der einen langen mathematischen Beweis von Hand überprüft, als einen "ziemlich ineffizienten Computer". Swart vergleicht den Mathematiker, der einen computergestützten Beweis führt, mit einem Wissenschaftler, der Bakterien durch ein Mikroskop betrachtet. Nun hat noch nie jemand Bakterien mit bloßem Auge gesehen. Dennoch würde niemand auf die Idee kommen, die Existenz von Bakterien deshalb anzuzweifeln, weil man sie nur durch ein Mikroskop sehen kann. Das Mikroskop bringt keine neue Qualität in die Arbeit des Wissenschaftlers ein, es macht aus dem Wissenschaftler lediglich einen Wissenschaftler mit "sehr effizienten Augen". Genauso ist der Computer in der Hand des Mathematikers lediglich ein "sehr effizienter Bleistift".

Natürlich kommt der Erkenntnisgewinn im Falle computergestützter Beweise nicht durch reine Verstandeskraft zustande. Der Einsatz physischer Hilfsmittel läßt sogar die Grenze zu den Experimentalwissenschaften zumindest verschwimmen. Doch auch im Falle traditioneller Beweise genügt die "reine" Verstandeskraft (also der vollständige Nachvollzug in unseren Köpfen) nur für triviale Beweise. Oder wer könnte behaupten, ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten im Kopf lösen zu können?

Was die Formalisierbarkeit anbetrifft, so geben selbst Appel und Haken zu, daß noch einiges zu tun bleibt. Swart gibt einige Hinweise, in welcher Richtung der Appel/Hakensche Beweis formalisiert werden könnte:

(1) Die Entladungsprozedur und die daraus resultierende Wahl der unvermeidlichen Menge könnten programmiert werden.
(2) Die Programme für die Entladungsprozedur und die Reduzibilitätsnachweise könnten in einer hohen Programmiersprache geschrieben werden; es könnte verifiziert werden, daß diese Programme in der Tat die Algorithmen implementieren, die zu implementieren sie vorgeben.

Diese Vorgehensweise deckt sich mit der des Autors; allerdings ist nicht der Versuch unternommen worden, das Programm 'Entladung' formal zu verifizieren. Doch genügt es vielleicht zu wissen, daß es verifiziert werden könnte, falls dies gewünscht werden sollte.

Es ist durch diese Diskussion hoffentlich deutlich geworden, daß computergestützte Beweise nicht einfach deshalb mindere Beweiskraft besitzen, weil sie nicht von Hand nachvollzogen werden können. Mit einigem Recht könnte man im Falle langer Beweise genau das Gegenteil behaupten (was durch die gefundenen Fehler empirisch untermauert wird). Dennoch wirft der Gebrauch des Computers schwerwiegende Fragen auf. Mag auch der Appel/Hakensche Beweis noch "zu schlucken" sein, so könnten zukünftige computergestützte Beweise sich als geradezu "unverdaulich" erweisen. Gesetzt den Fall, der Computer teilte uns mit, daß er herausgefunden habe, daß P = NP, doch sei der Beweis zu lang und zu kompliziert, als daß er von einem menschlichen Mathematiker verstanden werden könnte. Wie steht es dann mit unserem Vertrauen in die Maschine? Dies ist gewiß ein etwas bizarrer hypothetischer Fall, doch zeigt er uns die Notwendigkeit, tiefer über die Auswirkungen computergestützter Beweise auf die Mathematik und auf die Philosophie der Mathematik nachzudenken, als dies bis jetzt geschehen ist.

Es bleibt festzustellen, daß das Vierfarbenproblem, so esoterisch es auf den ersten Blick auch anmuten mag, sowohl in seinem geschichtlichen Werdegang als auch in der Art, in der es bewiesen wurde, einen weitreichenden Einfluß auf die Mathematik ausgeübt hat und immer noch ausübt.