KAPITEL 5

ENTLADUNGSPROZEDUREN

5.1 Der Graph als elektrisches Netzwerk

Ausgehend von einer Idee von Heesch betrachten wir in einem Gedankenexperiment Triangulationen als elektrische Netzwerke. Die Ecken sollen dabei Träger elektrischer Ladung sein und die Kanten Leitungen, an denen entlang elektrische Ladungen verschoben werden können. Die Triangulation G sei ein minimales Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz; dann kann sie nur Ecken vom Grad 5 oder höher enthalten (dies haben wir in Kapitel 3 bewiesen).

Wenn nun in G jede Ecke vom Grad i die Ladung (6 - i) hat, und wenn p_i die Anzahl der Ecken vom Grad i ist, dann ergibt sich eine Gesamtladung z_{ges} von

$$z_{ges} = p_5 - p_7 - 2p_8 - 3p_9 - \dots$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung, die wir in Abschnitt 3.1 aus der Eulerschen Formel hergeleitet hatten. Dort hatten wir auf der rechten Seite die Zahl 12 gehabt, und somit gilt

$$z_{ges} = 12$$

Wichtig ist hier nicht die Zahl 12, sondern die Tatsache, daß die Gesamtladung z_{ges} positiv ist.

Die anfängliche Ladungsverteilung bewirkt also, daß nur Fünferecken positiv geladen sind; Sechserecken haben die Ladung 0, Siebenerecken die Ladung -1 usw. Auf diese Ladungsverteilung können wir einen Algorithmus anwenden, die sogenannte Entladungsprozedur, welche die Ladungen innerhalb der Triangulation nach bestimmten Regeln verschiebt.

So könnten wir z.B. positive Ladung von einigen positiv geladenen Fünferecken zu einigen negativ geladenen Ecken vom Grad 7 oder höher transferieren. Selbstverständlich wird dadurch die (positive) Gesamtladung nicht verändert, doch können nun andere Ecken positiv geladen sein als zu Beginn der Entladungsprozedur. So haben vielleicht einige Fünferecken all ihre positive Ladung abgegeben (Entladung), während einige Ecken vom Grad 7 oder höher soviel Ladung erhalten haben, daß sie positiv geworden sind (Aufladung). Welche Ecken entladen oder aufgeladen werden, hängt von der jeweils gewählten Entladungsprozedur ab.

Hat man eine bestimmte Entladungsprozedur gewählt, so kann man eine endliche Liste all jener Figuren machen, die nach Ausführung der Entladungsprozedur Ecken positiver Ladung enthalten. (Natürlich kann jede dieser Figuren beliebig oft vorkommen.) Mit anderen Worten: positive Ladung kann nur in dieser endlichen Figurenmenge vorhanden sein. Da die Gesamtladung stets positiv ist, gibt es auch immer einige Ecken positiver Ladung. Da nun alle möglichen Träger positiver Ladung in der Figurenmenge enthalten sind, muß jede Triangulation mindestens eine dieser Figuren enthalten. Dieses Figurenmenge ist also eine unvermeidliche Menge.

Zweck der Entladungsprozedur ist es, die Ladungen so zu verteilen, daß nach Ausführung der Prozedur alle positiv geladenen Ecken entweder einer reduziblen Figur angehören oder benachbart sind (d.h. die Situationen, die positiv geladene Ecken enthalten, sind entweder identisch mit einer reduziblen Figur oder enthalten eine solche). Die Existenz einer solchen Entladungsprozedur würde den Vierfarbensatz beweisen, da ihre Figurenmenge sowohl unvermeidlich als auch reduzibel wäre. Falls jedoch nicht alle resultierenden Figuren reduzibel sind, haben wir keinen wirklichen Fortschritt erzielt. In der Tat kann man Kempes unvermeidliche Menge interpretieren als das Ergebnis der ineffizienten Entladungsprozedur, überhaupt keine Ladungen zu bewegen.

Zu einer gegebenen Entladungsprozedur gibt es mehr als eine unvermeidliche Menge. Kempes unvermeidliche Menge bleibt bei allen Entladungsprozeduren unvermeidlich, denn sie ist die kleinste unvermeidliche Menge, die man konstruieren kann. Das Kriterium zur Auswahl einer "geeigneten" unvermeidlichen Menge ist die Reduzierbarkeit ihrer Figuren. Läßt sich in einer Situation positiver Ladung keine reduzible Figur finden, so muß die Entladungsprozedur so geändert werden, daß diese Situation nach der Änderung keine positive Ladung mehr enthält.

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Untersuchung einer Figur auf Reduzierbarkeit äußerst aufwendig. Appel und Haken nannten eine Figur einen "Reduktionsfehler", wenn sie sich nicht innerhalb einer halben Stunde auf einer IBM 370/168 reduzieren ließ. Außerdem weigerten sie sich, Figuren zu rechnen, die mehr als 14 Randecken hatten. Ließ sich die Aufnahme einer so großen Figur in die unvermeidliche Menge nicht umgehen, so wurde die Entladungsprozedur entsprechend abgeändert. Dies hatte zur Folge, daß manchmal an Stelle einer großen Figur mehrere kleinere aufgenommen wurden. Der Grund für die Beschränkung der Randlänge auf 14 ist die Tatsache, daß jede zusätzliche Randecke sowohl die Rechenzeit als auch den Speicherbedarf der Reduktionsprogramme um den Faktor 4 vergrößert.

Appel und Haken bemerken hierzu, daß der Umfang der unvermeidlichen Menge wahrscheinlich umgekehrt proportional zur Randlänge ihrer Elemente ist. (Die unvermeidliche Menge hat etwa 1400 Elemente). Ende 1979 gelang es Heesch, die Reduzierbarkeit der ersten Figuren mit Randlänge 16 nachzuweisen; gegenwärtig (1982) versucht Heesch, Figuren mit Randlänge 17 zu reduzieren.

Fortschritte auf diesem Gebiet sind eng mit Fortschritten in der Rechnertechnologie gekoppelt. Je schneller und größer der Rechner, desto eher können aus Effizienzgründen eingeführte Beschränkungen fallen gelassen werden. Dies wiederum könnte eine Vereinfachung der Entladungsprozedur ermöglichen.

5.2 Eine einfache Entladungsprozedur

Bevor wir uns der Appel/Hakenschen Entladungsprozedur zuwenden, wollen wir uns die Begriffe "Entladungsprozedur" und "unvermeidliche Menge" an einem einfachen Beispiel klarmachen. Dazu betrachten wir eine Triangulation G, deren Ecken vom Grad i die Ladung (6 - i) tragen. Im folgenden werden wir die Zweier-, Dreier- und Viererecken nicht mehr explizit erwähnen. Diese bereits von Kempe reduzierten Figuren gehören zu jeder unvermeidlichen Menge dazu. Ferner wollen wir Ecken vom Grad 7 oder höher als "Ecken höheren Grades" bezeichnen; entsprechend heißen Ecken vom Grad 5 oder 6 auch "Ecken niederen Grades".

Gegeben sei folgende Entladungsprozedur P:

Entladungsprozedur P: Transferiere die Ladung 1/5 von jeder Fünferecke zu jeder Nachbarecke höheren Grades.

Eine zu dieser Entladungsprozedur korrespondierende unvermeidliche Menge ist in Abb. 5.1 wiedergegeben (mit Randkreisen); sie besteht aus zwei Figuren. Die eine ist ein Paar von Fünferecken, die durch eine Kante verbunden sind, die andere besteht aus einer Fünferecke und einer Sechserecke, ebenfalls durch eine Kante verbunden.

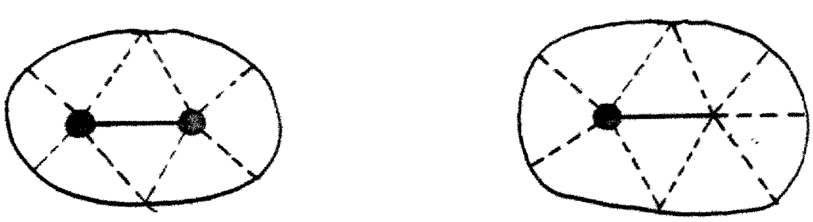


Abb. 5.1 Die Figuren der unvermeidlichen Menge

Wir wollen nun zeigen, daß diese beiden Figuren tatsächlich unvermeidlich sind. Eine Fünferecke kann nur dann positive Ladung zurückbehalten, wenn mindestens eine der Nachbarecken niederen Grades ist. Dann handelt es sich entweder um eine Nachbarecke vom Grad 5 oder um eine vom Grad 6; beide Fälle werden durch die unvermeidliche Menge abgedeckt.

Eine Sechserecke hat zu Beginn keine Ladung und erhält auch keine während der Entladungsprozedur.

Eine Siebenerecke kann nur positiv werden, wenn sie mindestens sechs Nachbarn vom Grad 5 hat; dann müssen aber zwei von ihnen durch eine Kante verbunden sein, und dies entspricht dem 5-5-Paar der unvermeidlichen Menge.

Eine Ecke vom Grad 8 oder höher kann nicht positiv werden, selbst wenn alle ihre Nachbarn Fünferecken sind. Dies kann man leicht einsehen, wenn man sich klar macht, daß die Gleichung

$$6 - i + i/5 > 0$$

nur erfüllt ist für $i < 7{,}5$. Ecken mit mehr als 7 Nachbarn können also von dieser Prozedur nicht positiv aufgeladen werden.

Also bilden das 5-5-Paar und das 5-6-Paar eine unvermeidliche Menge. Leider nützt das nicht viel, denn beide Figuren sind irreduzibel.

5.3 Reduktionshindernisse

Obwohl inzwischen mehrere tausend reduzible Figuren bekannt sind (siehe z.B. die 2669 reduziblen Figuren aus (9)), ist bis heute noch keine hinreichende Bedingung für die Reduzibilität einer Figur bekannt.

Hingegen hat Heesch schon vor 1965 die folgenden drei vermutlich hinreichenden Bedingungen für die Irreduzibilität von Figuren F erkannt, die nicht bereits kleinere reduzible Figuren enthalten.

1. Eine Figur F ist irreduzibel (mit Ausnahme der Viererecke), wenn eine innere Ecke von F zu vier oder mehr Randecken benachbart ist ("Vierbein").

2. Eine Figur F ist irreduzibel, wenn eine innere Ecke von F zu drei nichtkonsekutiven (d.h. nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden) Randecken benachbart ist ("Ypsilon").

3. Eine Figur F ist irreduzibel, wenn zwei innere Fünferecken von F einander benachbart sind, sowie zu genau einer weiteren inneren Ecke von F ("hängendes 5-5-Paar").

(Für die Fälle 1. und 2. hat Stromquist die D-Irreduzibilität bewiesen.)

Eine Figur, auf die einer dieser drei Fälle zutrifft, nennen wir ein Reduktionshindernis.

Es ist klar, daß sowohl das Pentagon aus Kempes unvermeidlicher Menge als auch die Figuren der unvermeidlichen Menge aus Abschnitt 5.2 Reduktionshindernisse sind, trifft doch auf alle Fall 1. zu.

Es ist noch nie gelungen, ein Reduktionshindernis zu reduzieren. Man vermutet, daß dies solange zutreffen wird, wie von dem klassischen Kempekettenargument Gebrauch gemacht wird.

Appel und Haken wußten um diesen Sachverhalt. In dem langen Prozeß, der zum Beweis des Vierfarbensatzes führte, bewiesen sie zunächst, daß es eine unvermeidliche Menge gibt, deren Figuren weder das erste noch das zweite Reduktionshindernis enthalten; solche Figuren nannten sie <u>geographisch gut</u>. 1974 veröffentlichten sie den Beweis (4) und lieferten gleich einen Algorithmus dazu, un eine derartige Menge zu konstruieren.

Bei der Entladungsprozedur, die sie im Beweis des Vierfarbensatzes verwendeten, wurden Figuren, die Reduktionshindernisse enthielten, gar nicht erst auf Reduzibilität untersucht; statt dessen wurde die Entladungsprozedur so abgeändert, daß die betreffende Figur nicht mehr zu einer Situation positiver Ladung gehörte.

5.4 Die Entladungsprozedur von Appel und Haken

Um Brüche zu vermeiden, benutzen Appel und Haken in ihrer Entladungsprozedur einen Multiplikator von 60. Jede Ecke vom Grad i erhält also die Anfangsladung 60(6 - i). Somit haben Fünferecken die Ladung 60, Sechserecken die Ladung 0, Siebenerecken die Ladung -60, usw. Die Gesamtladung ist 720.

Appel und Haken begannen mit einer sehr einfachen Prozedur:

Entladungsprozedur P: Transferiere die Ladung 30 von jeder Fünferecke zu jeder Nachbarecke höheren Grades.

Beachte, daß nach Ausführung dieser Entladungsprozedur Fünferecken auch negativ geladen sein können, im Extremfall bis zu -90.

Nach Ausführung von P (der Transfer von 30 wird von Appel und Haken auch "reguläre" Entladung genannt) sind einige Fünferecken noch immer positiv, während eine Reihe ehemals negativer Ecken höheren Grades nunmehr positiv sind. Wir müssen die Situationen, in denen diese positiv geladenen Ecken vorkommen, daraufhin untersuchen, ob sie reduzible Figuren enthalten.

Beginnen wir mit den Fünferecken. Nach Ausführung von P sind all jene Fünferecken noch immer positiv, die keinen oder genau einen Nachbarn höheren Grades haben. Sei μ die Anzahl der Nachbarn höheren Grades. Dann gibt es für $\mu = 0$ acht wesentlich verschiedene Situationen positiver Ladung (Abb. 5.2),

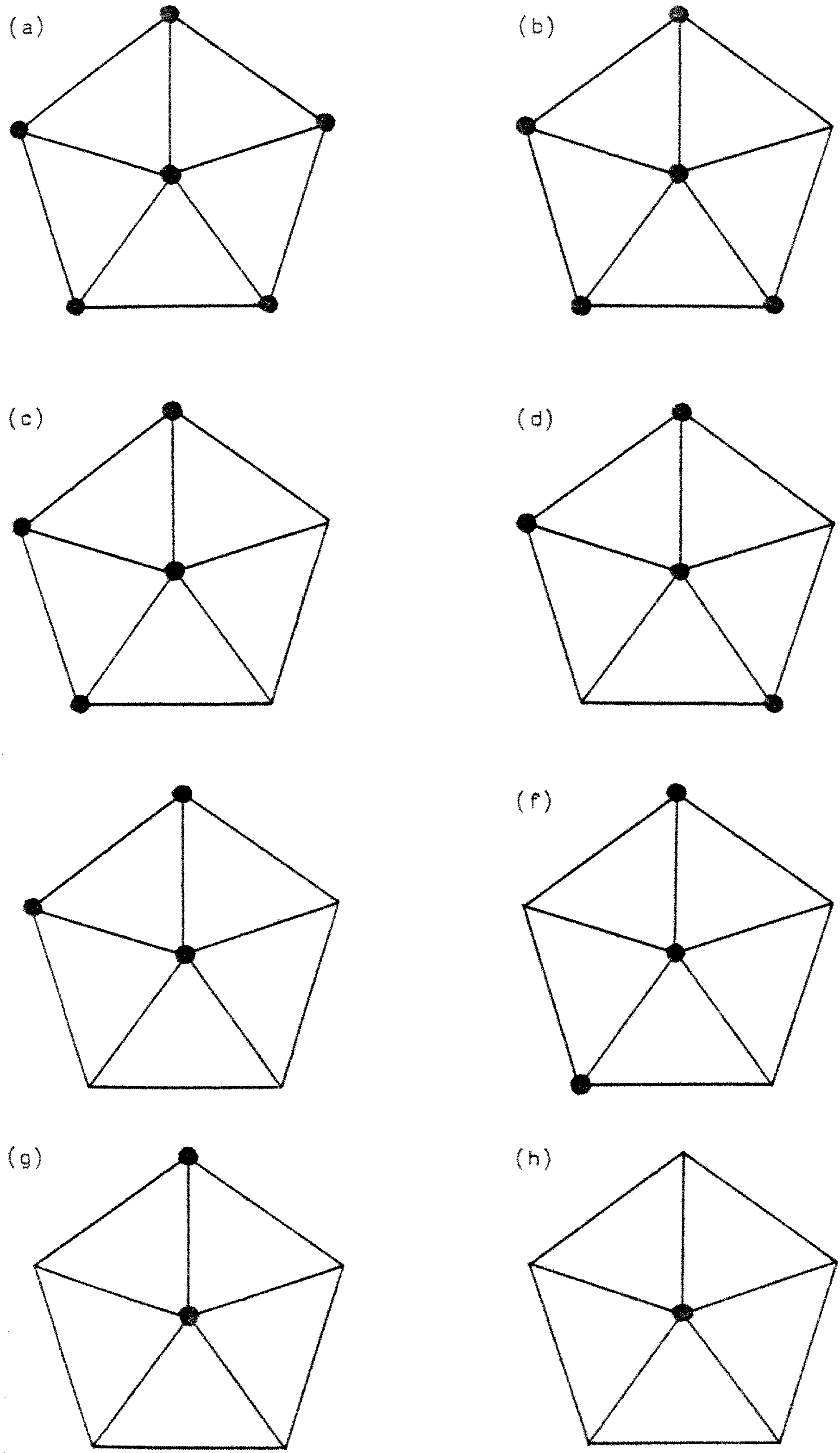
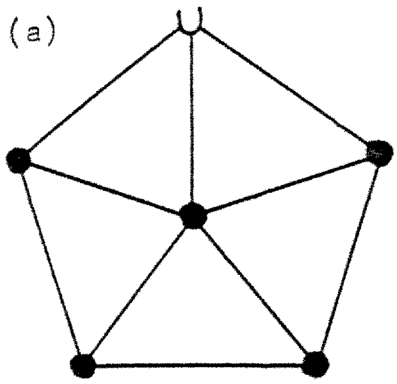
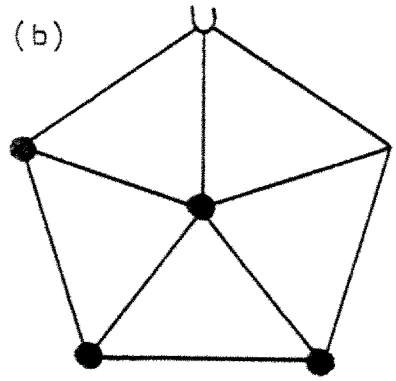


Abb. 5.2 $\mu = 0$

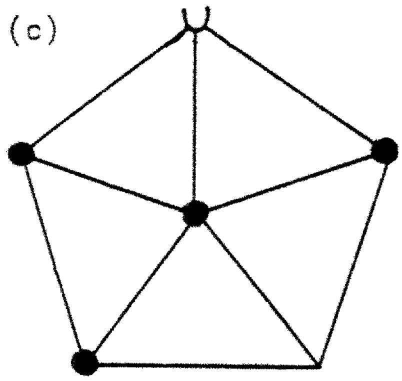
(a)



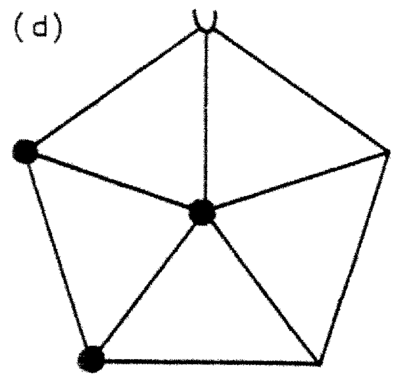
(b)



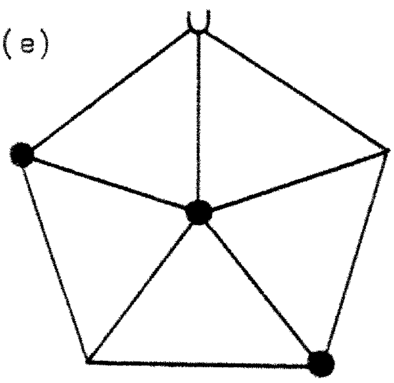
(c)



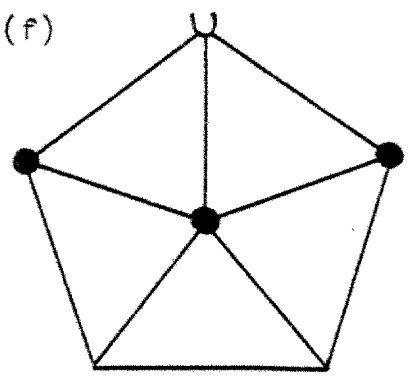
(d)



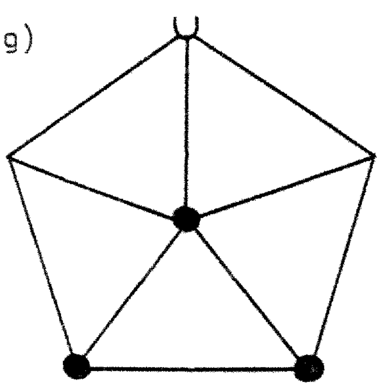
(e)



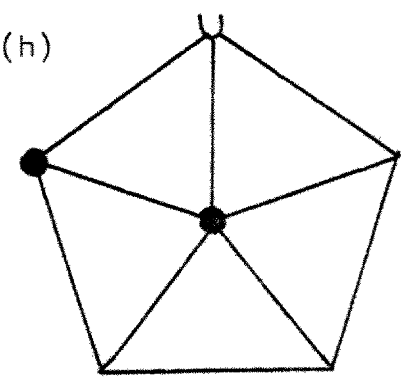
(f)



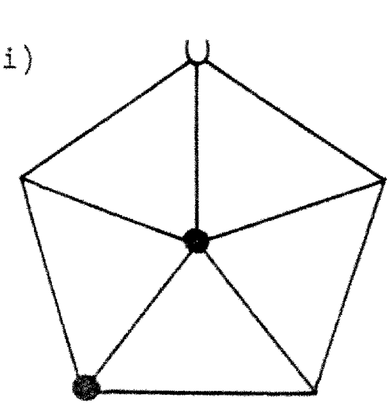
(g)



(h)



(i)



(j)

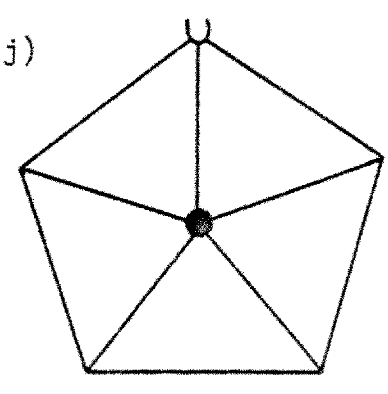


Abb. 5.3

$\mu = 1$

während es für $\mu = 1$ deren zehn sind (Abb. 5.3). Im Falle $\mu = 0$ sind alle Situationen entweder reduzibel oder enthalten eine der reduziblen Figuren aus Abb. 5.4 (die Bezeichnungen 1-1 und 1-2 entsprechen der von Appel und Haken gewählten Tabellenorganisation: vor dem Bindestrich steht die Seite (1 bis 63), hinter dem Bindestrich die Nummer (1 bis 35) der reduziblen Figur).

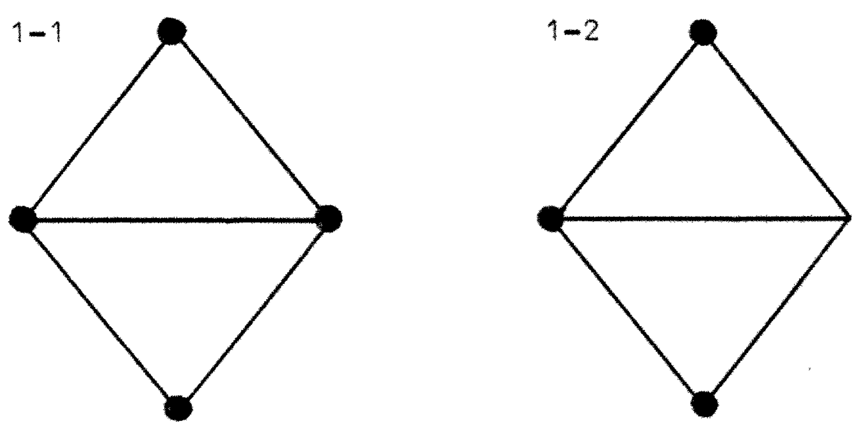


Abb. 5.4 Zwei reduzible Figuren

Im Falle $\mu = 1$ enthalten fünf Figuren aus Abb. 5.3 eine reduzible Figur. Die Figuren (a) und (b) enthalten die Figur 1-1 (den sogenannten Birkhoff-Diamanten), die Figuren (c) und (e) enthalten die Figur 1-2, und die Figur (f) enthält die reduzible Figur 1-4 aus Abb. 5.5.

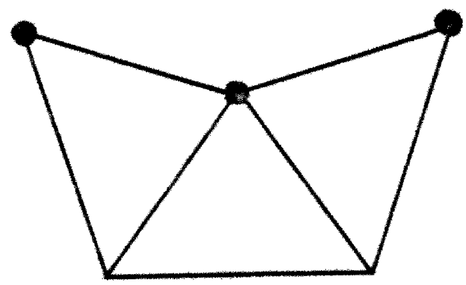


Abb. 5.5 Die reduzible Figur 1-4

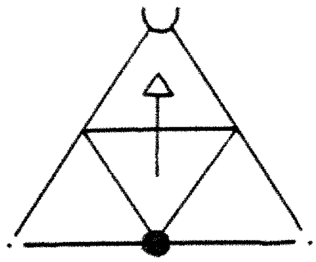
Die anderen fünf Figuren sind weder reduzibel noch enthalten sie eine reduzible Figur. Wir wollen solche Figuren <u>kritische Figuren</u> nennen.

Von den Ecken höheren Grades müssen wir nur die Ecken vom Grad 7 bis 11 untersuchen, da die Gleichung

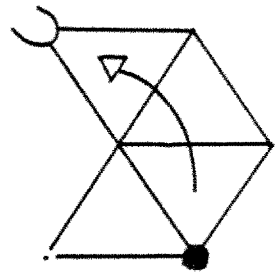
$$60(6 - i) + 30i > 0$$

nur erfüllt ist, falls $i < 12$. Bei den Ecken höheren Grades ist die Zahl der Situationen positiver Ladung zu groß, als daß sie hier wiedergegeben werden könnten. Doch auch hier kann sich der Leser leicht überzeugen, daß eine ganze Reihe kritischer Figuren übrig bleiben, d.h. Figuren, die keine Figur aus der Appel/Hakenschen unvermeidlichen Menge reduzibler Figuren enthalten.

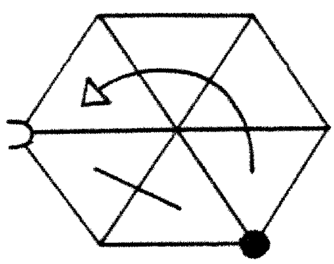
An dieser Stelle ändern Appel und Haken ihre Entladungsprozedur zum ersten Mal. Sie unterscheiden nun zwischen <u>Nahentladungen</u>, bei denen Ladung entlang 5-U-Kanten transferiert wird (eine 5-U-Kante verbindet eine Fünferecke mit einer Ecke höheren Grades), und <u>Fernentladungen</u>, bei denen Ladung von einer Fünferecke über ein, zwei oder drei 6-6-Kanten hinweg zu einer Ecke höheren Grades transferiert wird (eine 6-6-Kante verbindet zwei Sechserecken). Die Fernentladungen werden auch als <u>T-Entladungen</u> bezeichnet (transversal dischargings). Wir wollen nun die T-Entladungen definieren. Falls eine der sieben Figuren von Abb. 5.6, welche wir <u>T-Situationen</u> nennen, in unserer Triangulation G enthalten ist, dann wird Ladung transferiert wie durch die Pfeile angegeben.



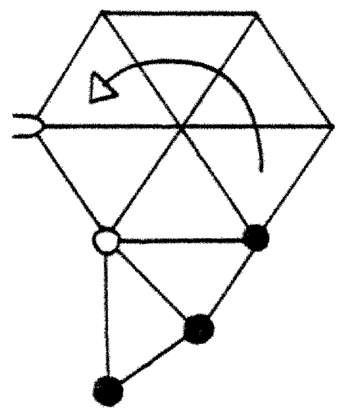
T1



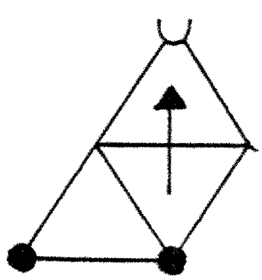
T2



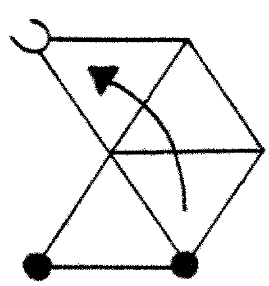
T3



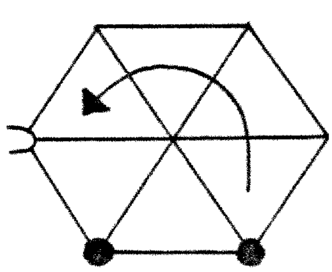
T4



T5



T6



T7

Abb. 5.6 Die sieben T-Situationen

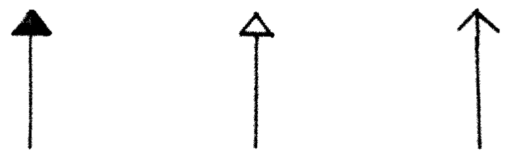


Abb. 5.7 Arten der T-Entladung

In Abb. 5.7 sind die verschiedenen Arten der T-Entladung dargestellt. Der linke Pfeil bedeutet einen Transfer von 20, der mittlere Pfeil einen Transfer von 10 und der rechte Pfeil einen Transfer von 5. Ein Pfeil ohne Kopf (wie in der T-Situation T3) zeigt eine T-Entladung an, deren Entladungswert noch nicht spezifiziert ist.

Abb. 5.8 verdeutlicht einige Ausnahmeregeln für den Fall, daß zwei T-Entladungen dieselbe Fünferecke über dieselbe 6-6-Kante verlassen (aber bei verschiedenen Ecken höheren Grades ankommen). Zeigen einer oder beide Pfeile eine T-Entladung des Wertes 20 an, so werden diese Entladungen durch solche des Wertes 10 ersetzt. Zeigen beide Pfeile eine T-Entladung des Wertes 10 an, so werden diese Entladungen durch solche des Wertes 5 ersetzt.

Eine T-Entladung des Wertes 10 oder 5 nennen wir auch <u>T1-Entladung</u>; entsprechend wird eine T-Entladung des Wertes 20 auch <u>T2-Entladung</u> genannt.

Appel und Haken beweisen nun einige Lemmata über T-Entladungen; zwei davon sollen hier wiedergegeben werden. Dabei bezeichnen wir das minimale Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz mit G' und die unvermeidliche Menge von Appel und Haken mit U (U kann wegen ihres Umfangs hier nicht aufgelistet werden).

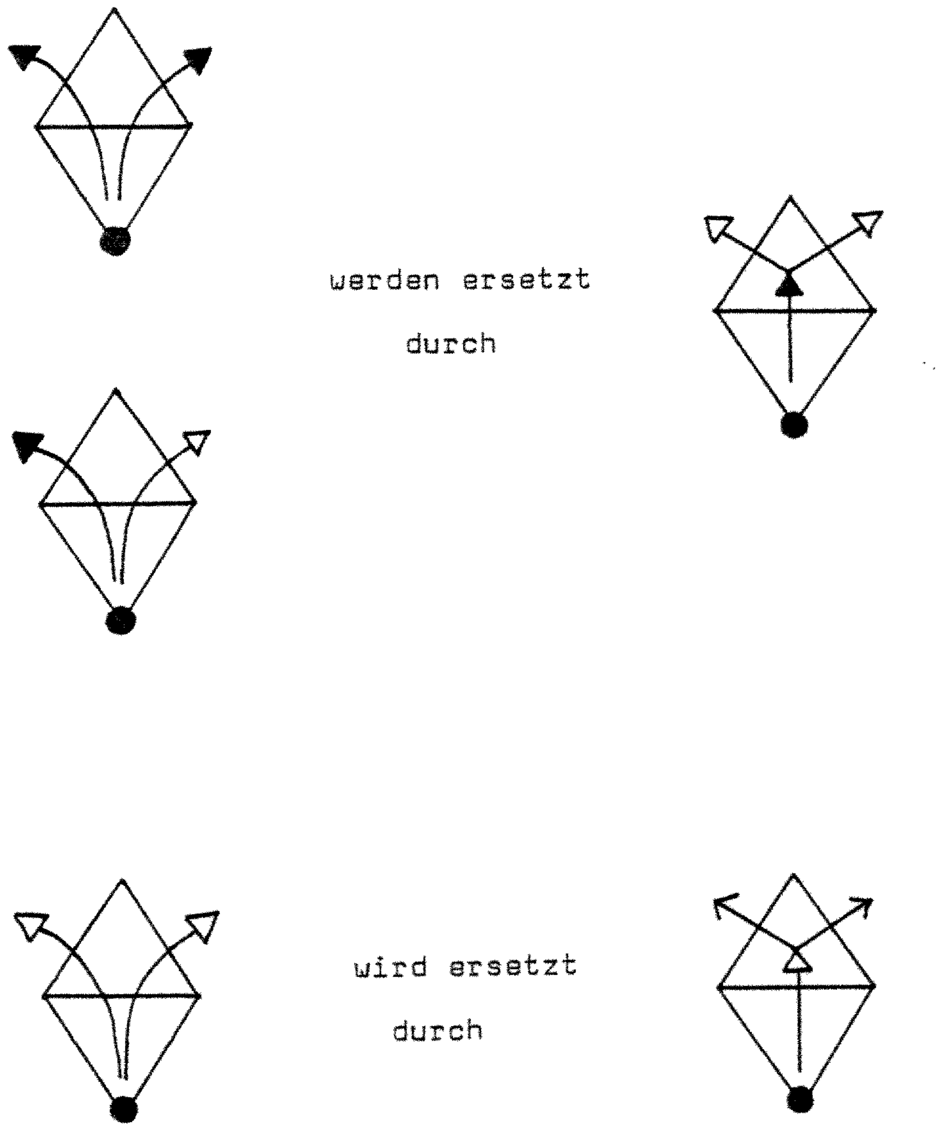


Abb. 5.8 Aufspaltung von T-Entladungen

<u>Lemma (5-6-6):</u> Hat eine Fünferecke v in G' drei konsekutive Nachbarn der Grade 5, 6, 6, dann findet eine T2-Entladung von v aus über die 6-6-Kante statt (siehe Abb. 5.9).

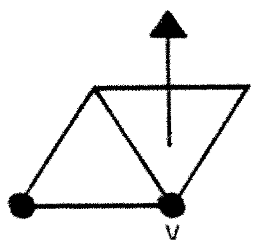


Abb. 5.9 Illustration zum Lemma (5-6-6)

<u>Beweis:</u> Sei G eine beliebige Triangulation, und v eine Fünferecke in G mit drei konsekutiven Nachbarn der Grade 5, 6, 6, und keine T2-Entladung verlasse v (in G) über die 6-6-Kante. Dann ist per definitionem keine der T-Situationen T5, T6 oder T7 derart in G enthalten, daß dadurch eine T-Entladung von v aus über die 6-6-Kante induziert würde. Also enthält G eine der vier Figuren aus Abb. 5.10, und somit eines der vier Elemente von U, um die in Abb. 5.10 eine Hülle gezeichnet ist. Somit ist $G \neq G'$, q.e.d.

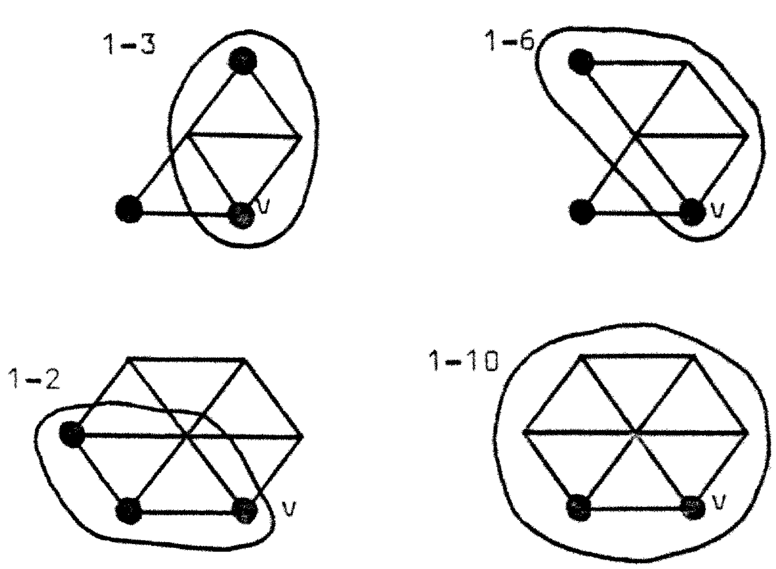


Abb. 5.10 Illustration zum Lemma (5-6-6)

Lemma (6-6-6): Hat eine Fünferecke v in G' drei konsekutive Nachbarn der Grade 6, 6, 6, dann findet eine T-Entladung von mindestens 10 von v aus über jede der beiden 6-6-Kanten statt. (siehe Abb. 5.11).

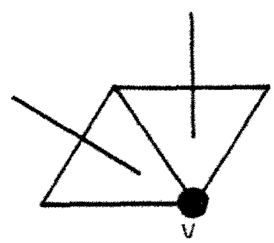


Abb. 5.11 Illustration zum Lemma (6-6-6)

Beweis: Sei G eine beliebige Triangulation, und v eine Fünferecke in G mit drei konsekutiven Nachbarn a, b, c vom Grad 6, und keine T-Entladung verlasse v über die a-b-Kante. Dann enthält G eine der vier Figuren aus Abb. 5.12. Also enthält G auch eine der Figuren 1-3, 1-6 oder 1-12 aus der unvermeidlichen Menge reduzibler Figuren U, und ist somit verschieden von G', q.e.d.

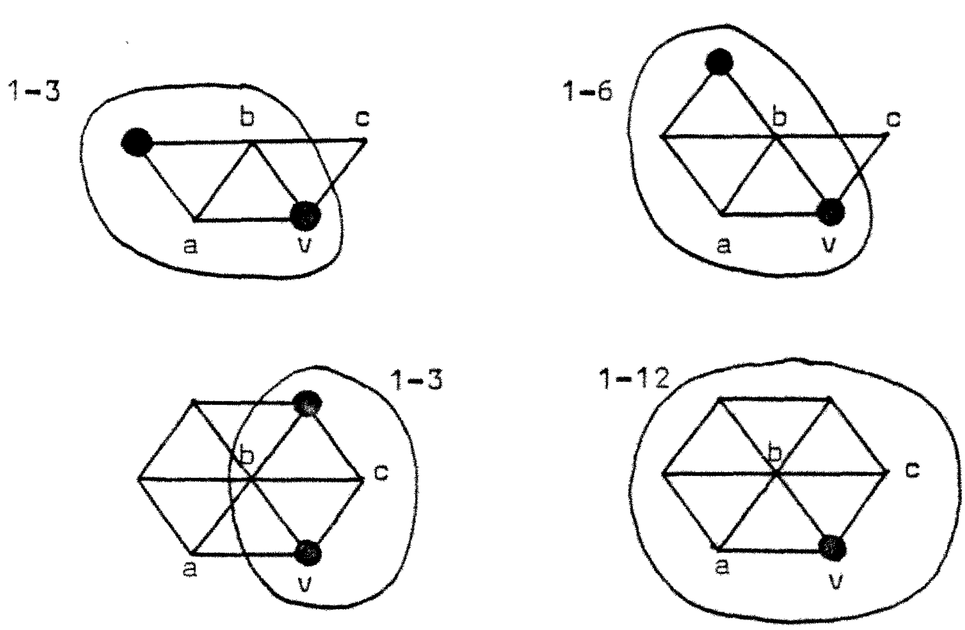


Abb. 5.12 Illustration zum Lemma (6-6-6)

Mit Hilfe dieser beiden Lemmata können wir zeigen, daß zwei der fünf kritischen Figuren von Abb. 5.3 nach Einführung der T-Entladungen nunmehr unkritisch geworden sind. Abb. 5.13 zeigt, daß die Figuren (h) und (j) vollständig entladene Fünferecken enthalten; die nicht spezifizierten T-Entladungen transferieren entweder 20 oder 10, jedoch nicht 5, wegen Lemma (6-6-6).

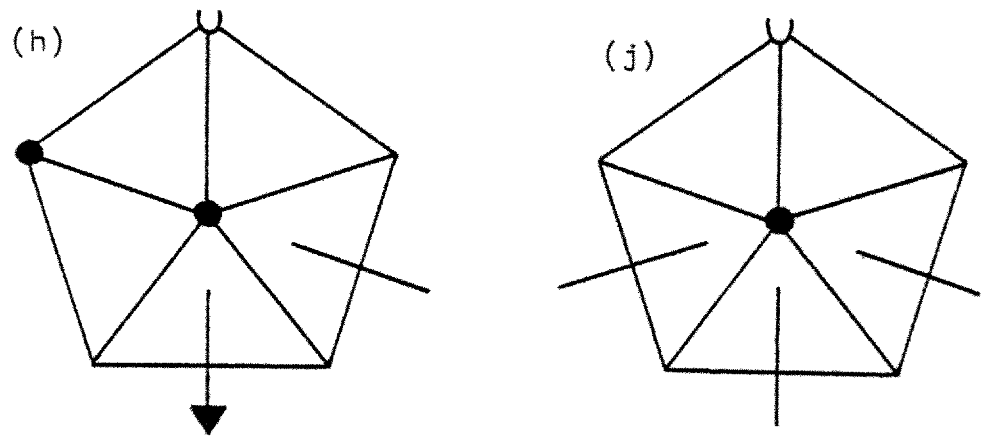


Abb. 5.13 Reguläre + T-Entladung

Die T-Entladungen verringern also die anfängliche Ladung von 60 um mindestens 30. Außerdem entlädt die zentrale Fünferecke noch 30 zu dem Nachbarn höheren Grades.

Die drei anderen kritischen Figuren haben auch nach Ausführung der T-Entladungen noch positive Ladung an ihrer zentralen Fünferecke. Bei den Ecken höheren Grades hat sich die Lage sogar noch verschlechtert - durch die T-Entladungen sind dort 30 neue kritische Situationen hinzugekommen, während von den alten kritischen Situationen keine unkritisch geworden ist. Zwei neue unkritische gegen dreißig neue kritische Situationen - das scheint ein schlechter Tausch zu sein! Doch die neuen kritischen Situationen sind größer als die alten, und je größer sie sind, desto größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, in ihnen reduzible Figuren zu finden.

Appel und Haken entschieden nun, sogenannte "Situationen kleiner Entladung" einzuführen, abgekürzt S-Situationen (small-discharging situations). In diesen Situationen entlädt die Fünferecke nicht mehr den regulären Wert von 30, sondern je nach Situation einen Wert von 0, 5, 10, 15, 20 oder 25. Durch diese Maßnahme sollte eine zu starke Aufladung der Ecken höheren Grades verhindert werden. Appel und Haken definierten eine Menge S_0 von etwa 70 "primären S-Situationen".

Die S-Situationen verhinderten nun zwar die Entstehung "bösartiger" kritischer Situationen bei den Ecken höheren Grades, doch gab es nun eine ganze Reihe zusätzlicher kritischer Situationen bei den Fünferecken, die nicht mehr genug Ladung abgeben konnten. Also führten Appel und Haken sogenannte "Situationen großer Entladung" ein, abgekürzt L-Situationen (large-discharging situations). In diesen Situationen entlädt die Fünferecke nicht mehr den regulären Wert von 30, sondern je nach Situation einen Wert von 35, 40, 45, 50, 55 oder 60. Appel und Haken definierten eine Menge L_0 von "primären L-Situationen".

Die ursprüngliche Entladungsprozedur P ist nunmehr eine Funktion der Menge T der T-Situationen, der Menge S_0 der S-Situationen und der Menge L_0 der L-Situationen. Dies bringen wir durch die Schreibweise $P(T, S_0, L_0)$ zum Ausdruck.

Nach Einführung der L-Situationen müssen zusätzliche S-Situationen ausgewählt werden, um das Entstehen neuer kritischer Situationen bei den Ecken höheren Grades zu vermeiden. Dies ergibt eine vergrößerte Menge S_1 (welche S_0 enthält) und eine veränderte Entladungsprozedur $P(T, S_1, L_0)$.

Dieser Prozeß iteriert solange, bis keine kritischen Situationen mehr übrig sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so hat man eine Entladungsprozedur, die eine unvermeidliche Menge reduzibler Figuren generiert, und dies beweist den Vierfarbensatz. Appel und Haken benötigten drei zusätzliche Iterationsschritte, d.h. sie endeten mit $P(T, S_3, L_3)$. Appel und Haken geben keinen Beweis, daß dieser Algorithmus terminieren muß, doch führen sie in einer detaillierten Diskussion, auf die einzugehen im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich ist, eine Fülle von Wahrscheinlichkeitsargumenten an, daß sich bei "vernünftiger" Wahl der Entscheidungen in der Tat ein Konvergenzverhalten erzielen läßt. (Der interessierte Leser sei verwiesen an (6), S. 478-486.)

Es sollte allerdings erwähnt werden, daß Allaire in seinem eigenen Beweis (1) zum Vierfarbensatz die Argumente von Appel und Haken zur Reduktionswahrscheinlichkeit als "wenig überzeugend" bezeichnet. Doch selbst wenn man dem zustimmt, bleibt es eine Tatsache, daß der von Wahrscheinlichkeitsüberlegungen geleitete Iterationsprozeß schließlich zum Ziel geführt hat, wenn auch erst nach vier Jahren.