

KAPITEL 4  
REDUZIERBARKEIT

4.1 Definitionen

(Eine rigorosere Darlegung findet sich in Appel/Haken: "The Existence of Unavoidable Sets of Geographically Good Configurations".)

Eine Konfiguration ist ein ebener Graph, dessen Ecken durch Angabe des Grades oder des Gradbereiches ganz bzw. teilweise spezifiziert sind. Solche Konfigurationen werden im folgenden hauptsächlich durch Zeichnungen beschrieben, wobei die Gradspezifikationen der Ecken durch Symbole verdeutlicht werden, die auf Heesch zurückgehen.

●	Grad = 5
←	Grad = 6 (kein spezielles Symbol)
○	Grad = 7
□	Grad = 8
▽	Grad = 9
∨	Grad > 5
∩	Grad > 6
⌈	Grad > 7

Jede Konfiguration ist von einem Randkreis umgeben, dessen Ecken Randecken heißen; der Grad der Randecken ist unbekannt. Bei größeren Konfigurationen kann der Randkreis durch Kontakte und Überlappungen degenerieren; dennoch wird er als Kreis gezeichnet, wenn er nicht ohnehin weggelassen wird.

Die Randlänge ist gleich der Zahl der Randecken; sie ist ein wichtiges Charakteristikum einer Konfiguration.

In Abb. 4.1 ist dieselbe Konfiguration zweimal dargestellt: links ohne, rechts mit Randkreis (im ersteren Fall spricht man auch von einer geschälten Darstellung). Die Randlänge ist 7.

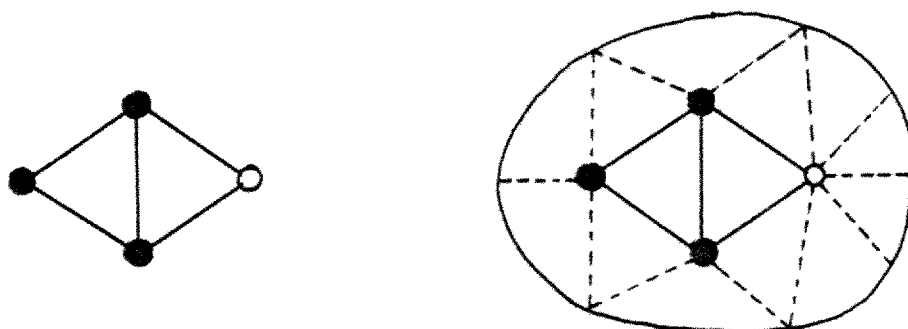
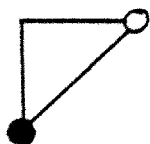
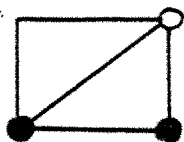


Abb. 4.1 Geschälte und ungeschälte Darstellung

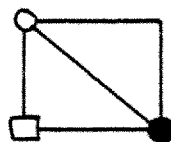
Eine Konfiguration C ist in einer anderen Konfiguration D enthalten, falls es eine Abbildung von C auf D gibt, so daß die Nachbarschaftsrelationen und Gradspezifikationen der Ecken von C erhalten bleiben. C wird dann eine Teilkonfiguration von D genannt. Die Abbildung kann die Orientierung von C erhalten oder umkehren, d.h. C kann in D normal oder reflektiert enthalten sein. Wollen wir sagen, daß C normal in D enthalten ist, so schreiben wir "C<sub>n</sub> ist in D enthalten"; wollen wir sagen, daß C reflektiert in D enthalten ist (d.h. daß das Spiegelbild von C in D enthalten ist), dann schreiben wir "C<sub>r</sub> ist in D enthalten". Der Ausdruck "C ist in D enthalten" bedeutet, daß entweder C<sub>n</sub> oder C<sub>r</sub> in D enthalten ist. In Abb. 4.2 ist Konfiguration A in den Konfigurationen B und C enthalten (A<sub>n</sub> ist in B enthalten, A<sub>r</sub> ist in C enthalten).



A



B



C

Abb. 4.2

Eine Konfiguration ist reduzibel, falls sie in einem Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz nicht enthalten sein kann, andernfalls ist sie irreduzibel. Man reduziert eine Konfiguration, indem man zeigt, daß sie reduzibel ist.

Für das Wort "Konfiguration" werden wir im folgenden auch das Wort "Figur" gebrauchen.

## 4.2 Reduktionsarten

Wir haben bereits gesehen, daß es Kempe gelungen ist, alle Elemente seiner unvermeidlichen Menge zu reduzieren, mit Ausnahme des Pentagons. Die Reduzierbarkeit des Pentagons scheint mit den heutigen Methoden nicht nachweisbar zu sein. Während der letzten hundert Jahre sind viele kompetente und noch mehr inkompetente Versuche gemacht worden, den Fehler in Kempes Beweis zu reparieren, allesamt ohne Erfolg.

Daher haben sich die Vierfarbenforscher schon frühzeitig mit Figuren beschäftigt, die zwar das Pentagon enthielten, aber außerdem noch weitere Ecken. Es zeigte sich, daß solche größeren Figuren oftmals reduzibel waren. Über die Jahre verfeinerten sich die Reduktionsmethoden, es bildete sich eine regelrechte Reduktionstheorie heraus, und in diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Methoden vorgestellt werden.

Wenn wir eine einzelne Ecke (Kempe) oder eine größere Figur (Birkhoff u.a.) reduzieren wollen, so entfernen wir sie zunächst aus dem angenommenen minimalen Gegenbeispiel  $G$ . Das so entstehende "Loch" können wir entweder leer lassen (wie Kempe es tat) oder mit einer anderen Figur auffüllen, die weniger Ecken hat als die ursprünglich entfernte. Da der so entstandene Graph  $G'$  in beiden Fällen weniger Ecken hat als  $G$ , ist er auf jeden Fall vierfärbbar.

Die Figur, die an Stelle der originalen Figur eingesetzt wird, nennen wir den Reduzenten der originalen Figur. Der Randkreis des Reduzenten kann auch "degeneriert" sein, d.h.

- (1) es darf eine Kante eingefügt werden zwischen zwei Ecken, die miteinander noch nicht verbunden sind, sofern dadurch die Ebenheit des Graphen nicht zerstört wird;
- (2) falls die in (1) beschriebene Situation existiert, können die beiden Ecken, statt durch eine Kante verbunden zu werden, auch zu einer Ecke zusammengefaßt werden.

Der Randkreis des Reduzenten kann beliebig degeneriert sein, sofern nur seine Färbung auf den originalen Randkreis übertragen werden kann.

Betrachten wir noch einmal Kempes Vorgehensweise. Gegeben sei ein Graph  $R$ , dessen Struktur wir kennen, und den wir reduzieren möchten.  $R$  sei enthalten in der Triangulation  $G$ , unserem angenommenen Gegenbeispiel. Der Randkreis von  $R$  sei  $Q$ . Wir entfernen  $R$  aus  $G$  und erhalten so den vierfärbbaren Graphen  $G' = G - R$ . Wir färben  $G'$  mit vier Farben. Dies induziert eine Färbung von  $Q$ . Falls nun die Färbung von  $Q$  auf die Ecken von  $R$  erweitert werden kann (d.h. falls die Färbung von  $Q$  die Vierfärbung von  $R$  nicht verhindert), so haben wir  $G$  viergefärbt, und wir nennen  $R$  direkt färbbar.

Läßt sich hingegen die  $Q$ -Färbung nicht auf  $R$  erweitern, so betrachten wir die Kempekette, die bei den  $Q$ -Ecken beginnen, und verändern die Färbung von  $Q$  durch Farbvertauschung, genau wie in Kempes Beweis.

Zwei Fragen stellen sich uns nun. Wenn wir über die Struktur von  $G'$  nichts wissen, wie können wir dann irgendetwas über die durch Vierfärbung von  $G'$  induzierte Färbung von  $Q$  aussagen?

Schlimmer noch, woher kennen wir die Anordnung der Kempeketten in  $G'$ ? Die Antwort ist einfach: wir wissen weder das eine noch das andere - und müssen daher alle Möglichkeiten durchprobieren. Falls jede mögliche  $Q$ -Färbung sofort auf  $R$  erweiterbar ist, oder nach Farbvertauschung auf  $R$  erweiterbar ist, dann haben wir die Reduzierbarkeit von  $R$  bewiesen.

Eine  $Q$ -Färbung, die sofort auf  $R$  erweiterbar ist, nennt man auch gute Färbung. Die Zahl der möglichen Randkreisfärbungen wächst mit der Randkreislänge sehr schnell an. So gibt es für den in Abb. 4.3 dargestellten Randkreis der Länge 13 66430 wesentlich verschiedene Färbungen; die Zahl der guten Färbungen beträgt 8044. Wenn  $x$  das Verhältnis der guten Randkreisfärbungen zur Zahl der möglichen Randkreisfärbungen angibt, so gilt  $x = 0,121$  für Abb. 4.3. Wahrscheinlichkeitsberechnungen von Appel und Haken haben ergeben, daß für  $x \leq 10\%$  praktisch keine Chance auf Reduzierbarkeit besteht; für  $x \approx 20\%$  besteht eine sehr gute Chance, und für  $x \geq 30\%$  kann man die Reduzierbarkeit als fast sicher annehmen.

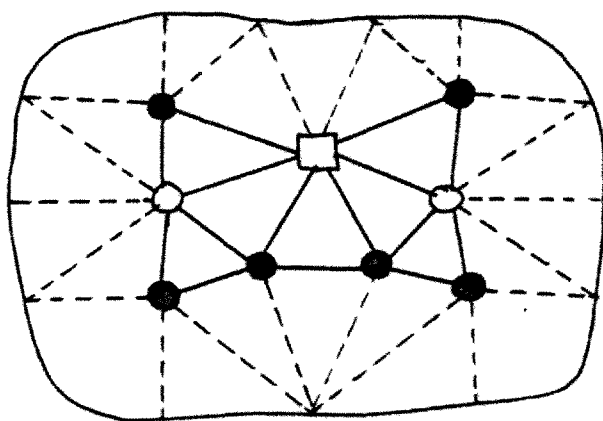


Abb. 4.3 Reduzible 13er-Figur

Gegeben sei die Figur R aus Abb. 4.4; sie soll reduziert werden.

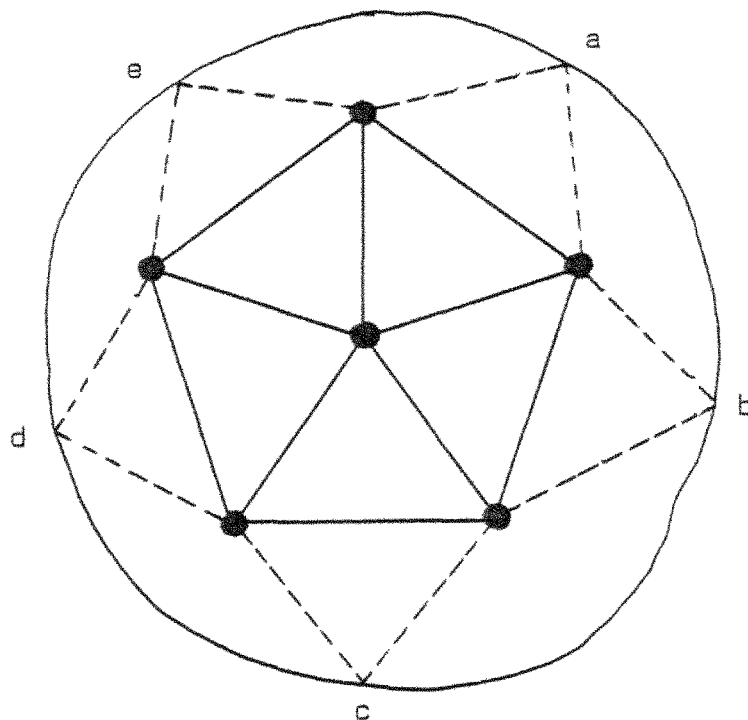


Abb. 4.4

Dazu müssen wir, wenn wir keinen Reduzenten einsetzen, alle möglichen Färbungen des Randkreises betrachten. Davon gibt es zehn wesentlich verschiedene (d.h. ohne durch zyklische Permutation oder Reflexion entstandene). Berücksichtigen wir noch zusätzlich die stark symmetrische Struktur von R, so erhalten wir zwei unterschiedliche Färbungen:

a	b	c	d	e
1	2	1	2	3
1	2	1	3	4

Beide Färbungen lassen sich, wie Abb. 4.5 zeigt, sofort auf R erweitern. Somit ist R direkt färbbar.

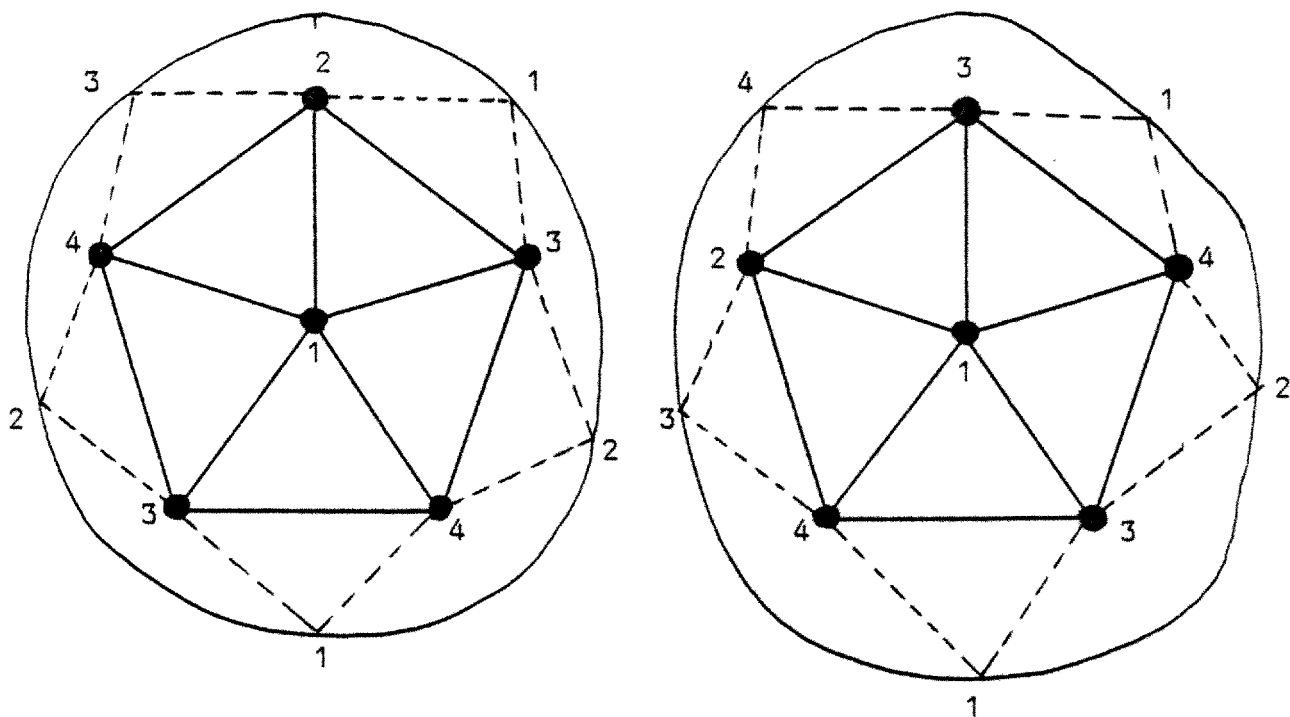


Abb. 4.5

Wir setzen jetzt an Stelle von  $R$  den Reduzenten  $S$  aus Abb. 4.6 ein, ein einzelnes Pentagon.

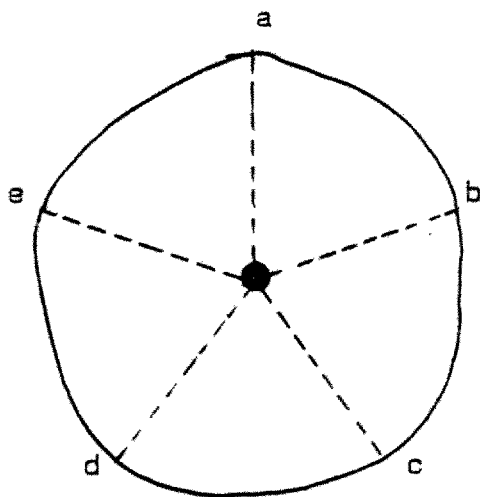


Abb. 4.6

Der Leser möge  $S$  auf alle möglichen Arten färben, die Randkreisfarben auf  $R$  übertragen, und sich davon überzeugen, daß die Färbung von  $R$  vollendet werden kann. Es gibt genau fünf wesentlich verschiedene Randkreisfärbungen von  $S$ , und alle sind kompatibel mit  $R$ . Unter Berücksichtigung der Symmetrie



von  $R$  bleibt bloß eine Färbung übrig:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Der Reduzent hat die Hälfte der Färbungen, die wir anfänglich betrachteten, unmöglich gemacht, und somit auch den Arbeitsaufwand um die Hälfte reduziert. Reduzenten erzwingen ganz bestimmte Färbungen von  $G'$ , und schließen damit viele der möglichen Randfärbungen aus; dies ist das Hauptmotiv für ihren Einsatz.

Wir wollen dieses Konzept noch etwas allgemeiner untersuchen. Sei  $J$  die Menge aller möglichen Farbschemata (d.h. wesentlich verschiedenen Färbungen) des Randkreises. Durch Färben von  $R$  in jeder möglichen Weise erhalten wir eine Teilmenge  $U = J(R)$ , welche nur diejenigen Schemata enthält, die mit  $R$  kompatibel sind. Durch Färben von  $S$  in jeder möglichen Weise erhalten wir eine Teilmenge  $V = J(S)$ , welche nur diejenigen Schemata enthält, die mit  $S$  kompatibel sind. Unser Beispiel genügt der Bedingung  $V \subseteq U$  und ist deshalb direkt färbbar.

Direkte Färbbarkeit ist leider selten. Sie ist in Form eines Venn-Diagramms in Abb. 4.7(a) dargestellt; die typischere Situation ist jedoch die von Abb. 4.7(b). In diesem Fall ergeben auch die besten Reduzenten noch einige Farbschemata, die nicht in  $U$  enthalten sind. Wenn es möglich ist, auch diese Schemata durch Farbvertauschungen ihrer Kempeketten in andere Schemata zu überführen, die in  $U$  enthalten sind, so nennt man die derart reduzierte Figur kettenfärbbar.

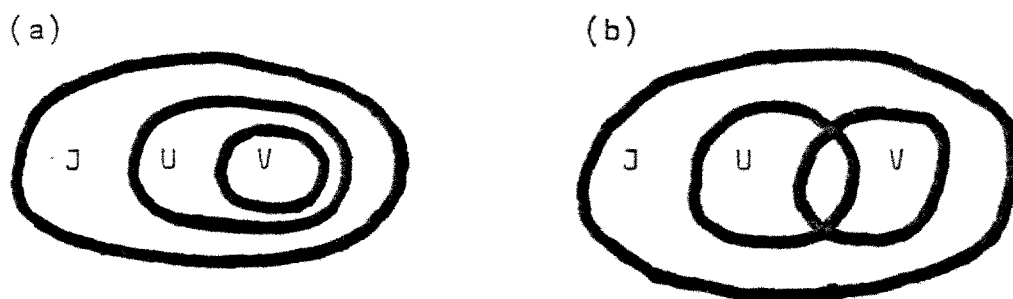


Abb. 4.7 Venn-Diagramme

Die Farbschemata, die außerhalb von  $U$  liegen, lassen sich meistens nicht "auf einen Schlag" nach  $U$  überführen; daher wird das Kempekettensargument meistens iterativ gebraucht. Grundsätzlich läßt sich der Reduktionsprozess ähnlich dem Sieb des Eratosthenes implementieren, doch in der Praxis werden effizientere Algorithmen eingesetzt. Einen guten Überblick über solche Algorithmen bieten Allaire und Swart in "A Systematic Approach to the Determination of Reducible Configurations in the Four-Color Conjecture".

Die Wahl eines "guten" Reduzenten ist keineswegs trivial. Bei den meisten Implementierungen von Reduktionsalgorithmen gilt die Devise von "Versuch und Irrtum", denn in der Literatur finden sich nur wenige Kriterien für die Auswahl "guter" Reduzenten. In der Tat nannten Appel und Haken eine Figur einen "Reduktionsfehler" (nicht zu verwechseln mit "irreduzibel"), falls sich die Reduzierbarkeit nicht innerhalb von 30 Minuten auf einer IBM 370/168 zeigen ließ (90 Minuten auf einer IBM 370/158).

In der Literatur werden kettenfärbbare Figuren auch als D-reduzibel bezeichnet, während Figuren, die durch Reduzenten reduziert werden, auch als C-reduzibel bekannt sind (diese Bezeichnungen stammen von Heesch).