KAPITEL 3

DIE GESCHICHTE DES VIERFARBENSATZES

Das Vierfarbenproblem scheint erstmals 1852 durch einen englischen Studenten formuliert worden zu sein. Der erste professionelle Mathematiker, der sich mit diesem scheinbar so leichten Problem befaßte, war Augustus de Morgan. De Morgan konnte jedoch nur beweisen, daß keine ebene Landkarte fünf Länder enthält, die alle einander benachbart sind. Aus diesem Resultat läßt sich jedoch nicht die Richtigkeit des Vierfarbensatzes folgern.

Ein Vierteljahrhundert später griff Arthur Cayley das Problem auf und präsentierte es der "London Mathematical Society", wobei er zugab, daß er das Problem nicht hatte lösen können. Knapp ein Jahr später, 1879, glaubte Alfred Kempe, ein Anwalt und Amateurmathematiker, einen Beweis gefunden zu haben; er veröffentlichte ihn im "American Journal of Mathematics". 1880 veröffentlichte Tait einen weiteren Beweis, der auf der Vermutung basierte, jeder dreifach zusammenhängende Graph, dessen Ecken alle vom Grad 3 seien, besitze einen Kreis, der durch alle Ecken des Graphen gehe. Tutte widerlegte 1946 diese Vermutung durch ein Gegenbeispiel.

1890 fand Heawood den Fehler in Kempes Beweis. Eine Reparatur gelang nicht, jedoch konnte Heawood den Vierfarbensatz für Oberflächen höheren Geschlechts verallgemeinern sowie für die Ebene ein etwas schwächeres Resultat erzielen ("Fünffarbensatz"). Heawood arbeitete noch weitere 60 Jahre am Vierfarbenproblem. 1898 formulierte er ein zum Vierfarbenproblem äquivalentes algebraisches Problem, dessen Lösung sich als nicht minder schwierig erwies.

1912 formulierte Veblen ein äquivalentes geometrisches Problem. Petersen zeigte, daß das Vierfarbenproblem äquivalent ist zu dem Problem, die Kanten eines Graphen zu färben.

Viele Beweise für Spezialfälle wurden erbracht. Hier verdient die "Birkhoffzahl" Erwähnung, die angibt, wieviel Länder ein Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz mindestens besitzen müßte. Franklin erhöhte die Birkhoffzahl auf 26, Reynolds auf 28, dann wieder Franklin auf 32. Später machte die Birkhoffzahl rasch Sprünge auf 36, 40, 52 und 96. Appel und Hakens erfolgreicher Beweis hat dann die Birkhoffzahl auf unendlich angehoben.

3.1 Kempes Beweis

Obwohl Kempes Beweis fehlerhaft ist, enthält er einige wichtige Ideen, die auch im erfolgreichen Beweis von Appel und Haken eine Rolle spielen. Kempe bediente sich der klassischen mathematischen Beweismethode der "reductio ad absurdum": er nahm die Existenz eines Gegenbeispiels zum Vierfarbensatz an und zeigte, daß diese Annahme zum Widerspruch führt.

Kempe konnte davon ausgehen, daß drei Farben zur Färbung einer beliebigen Landkarte nicht ausreichen, denn es ist ohne weiteres möglich, vier Länder so zu zeichnen, daß alle einander benachbart sind. Ein Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz muß also eine Landkarte sein, die sich nur mit fünf oder mehr Farben färben läßt.

Gibt es solche Gegenbeispiele, dann gibt es auch ein <u>minimales Gegenbeispiel</u>, d.h. ein Gegenbeispiel mit der kleinsten Eckenzahl unter allen möglichen Gegenbeispielen. Entfernt man aus einem minimalen Gegenbeispiel auch nur eine Ecke, so erhält man eine vierfärbbare Landkarte.

Sei G eine Triangulation mit p Ecken, q Kanten und r Gebieten. Jedes Gebiet ist ein Dreieck, und somit von genau drei Kanten begrenzt. Da außerdem jede Kante zur Begrenzung zweier Gebiete gehört, erhalten wir

$$2q = 3r.$$

Dies setzen wir in die Eulersche Formel $p - q + r = 2$ ein und erhalten

$$3p + 2q = 3q + 6$$
$$3p = q + 6$$

Nun sei p_i die Anzahl der Ecken vom Grad i. Damit ist die Anzahl der Kanten in G gleich $\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} ip_i$. Somit gilt

$$3p = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} ip_i + 6$$
$$6p - \sum_{i=0}^{\infty} ip_i = 12$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} 6p_i - \sum_{i=0}^{\infty} ip_i = 12 \qquad (\text{da } \sum_{i=0}^{\infty} p_i = p)$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}(6 - i)\, p_i = 12$$
$$4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - 3p_9 - \ldots = 12$$

(da G maximal eben ist, gilt $p_0 = p_1 = 0$)

Diese Gleichung ist von großer Bedeutung. Sie ist das wichtigste Werkzeug im ersten Teil des Beweises. Die einzigen positiven Terme in der Reihe sind diejenigen mit p_2, p_3, p_4 und p_5. Mindestens eine dieser Zahlen muß daher größer als Null sein. Mit anderen Worten: <u>jeder maximal ebene Graph hat eine Ecke vom Grad 5 oder kleiner.</u>

Dieses Resultat kann nicht verbessert werden; es gibt Graphen, die keine Ecke vom Grad kleiner als 5 haben. Einen solchen Graphen zu konstruieren ist schwierig, doch zeigt uns die obige Gleichung, daß ein solcher Graph mindestens 12 5-Ecken haben muß. Abb. 3.1 gibt dafür ein Beispiel.

Unser Graph G muß also mindestens einen der Teilgraphen aus Abb. 3.2 enthalten.

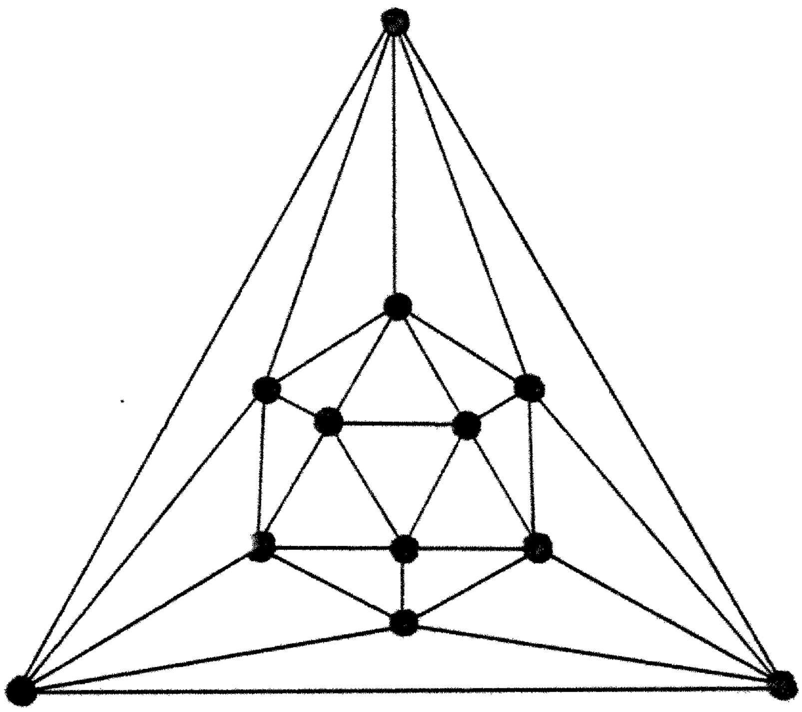


Abb. 3.1 Ein Graph, dessen Ecken alle vom Grad 5 sind

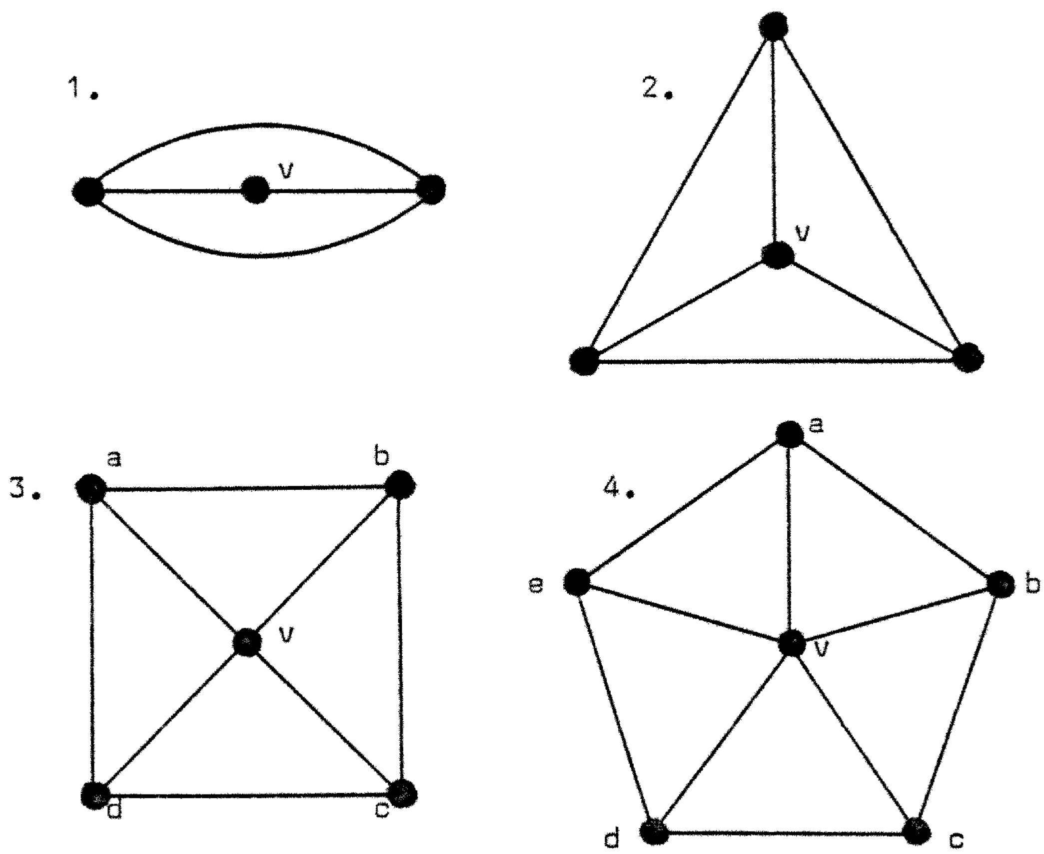


Abb. 3.2 Kempes unvermeidliche Menge

Diese Graphen bilden eine sogenannte unvermeidliche Menge; jede Triangulation muß einen von ihnen enthalten.

Sei nun G ein minimales Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz. Dann muß G einen der vier Graphen aus Abb. 3.2 enthalten. Wir werden jetzt jeden Fall einzeln betrachten und einen Widerspruch herbeiführen, indem wir zeigen, daß G vierfärbbar ist.

1. G enthalte den ersten Graphen aus Abb. 3.2. Sei G' = G - v. Dann ist G' vierfärbbar, da G ein minimales Gegenbeispiel ist. Da v nur zu zwei Ecken benachbart ist, kann v, wenn es zu G' wieder hinzugefügt wird, mit einer dritten Farbe gefärbt werden. Also ist G vierfärbbar.

2. G enthalte den zweiten Graphen aus Abb. 3.2. Sei G' = G - v. Da v nur zu drei Ecken benachbart ist, kann v, wenn es zu G' wieder hinzugefügt wird, mit einer vierten Farbe gefärbt werden. Also ist G vierfärbbar.

3. G enthalte den dritten Graphen aus Abb. 2.3. Wie vorher entfernen wir v und vierfärben G'. Falls nun die vier zu v benachbarten Ecken nur zwei oder drei Farben benutzen, so können wir v mit der dritten bzw. vierten Farbe färben, und G ist damit vierfärbbar. Falls aber alle vier Farben benutzt werden, müssen wir anders argumentieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir eine Verteilung der Farben 1, 2, 3 und 4 annehmen wie in Abb. 3.3 gezeigt.

Wir definieren nun eine x,y-Kempekette als einen Weg, der alternierend über Ecken der Farben x und y führt. Nun kann es in G' eine 1,3-Kempekette von a nach c geben, oder eine 2,4-Kempekette von b nach d. Man sieht jedoch leicht, daß wegen der Ebenheit von G' nicht beide Ketten zugleich existieren können.

Nehmen wir nun an, es gebe keine 1,3-Kempekette von a nach c. Dies ist in Abb. 3.4(b) dargestellt (die Argumentation verläuft im anderen Fall entsprechend, dargestellt in Abb. 3.4(a)).

Wir nehmen nun alle Ecken in allen 1,3-Kempeketten, die bei c beginnen, und ändern deren Farbe von 1 in 3 bzw. von 3 in 1. Wenn also der Graph ursprünglich aussah wie der Graph von Abb. 3.5(a), dann wird er nach dieser Farbvertauschung aussehen wie der Graph von Abb. 3.5(b). (Dieser Graph ist keine Triangulation, und könnte deshalb nicht G sein; dennoch ist er zur Illustration der Farbvertauschung geeignet.)

Die Farbvertauschung ergibt immer noch eine gültige Vierfärbung. Der Leser möge sich klarmachen, daß auch nach der Farbvertauschung benachbarte Ecken unterschiedliche Farben haben. Jedoch benutzen die Ecken a, b, c und d nunmehr lediglich drei Farben, so daß wir die vierte Farbe für v verwenden können; somit ist G vierfärbbar, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Farbvertauschung kann niemals die Vierfärbung eines Graphen zerstören. Es wäre natürlich auch möglich gewesen, die Farben 2 und 4 von Ecke b aus zu vertauschen, doch hätte dies zu nichts geführt: b hätte die Farbe 4 und d die Farbe 2 bekommen,

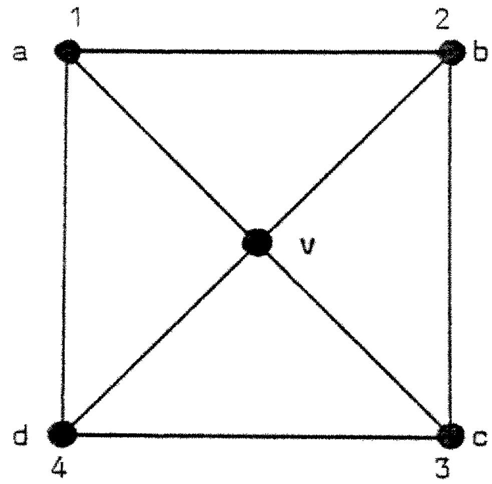


Abb. 3.3 Angenommene Farbverteilung

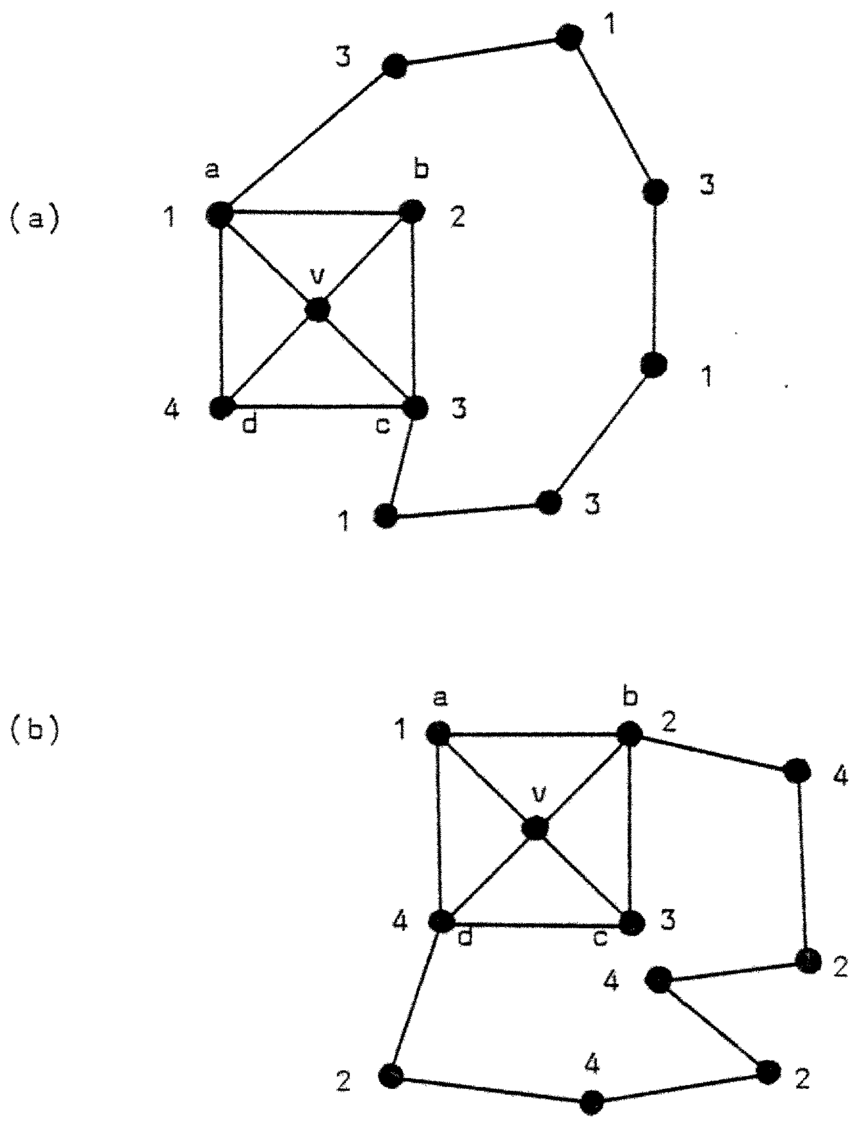


Abb. 3.4 Kempeketten

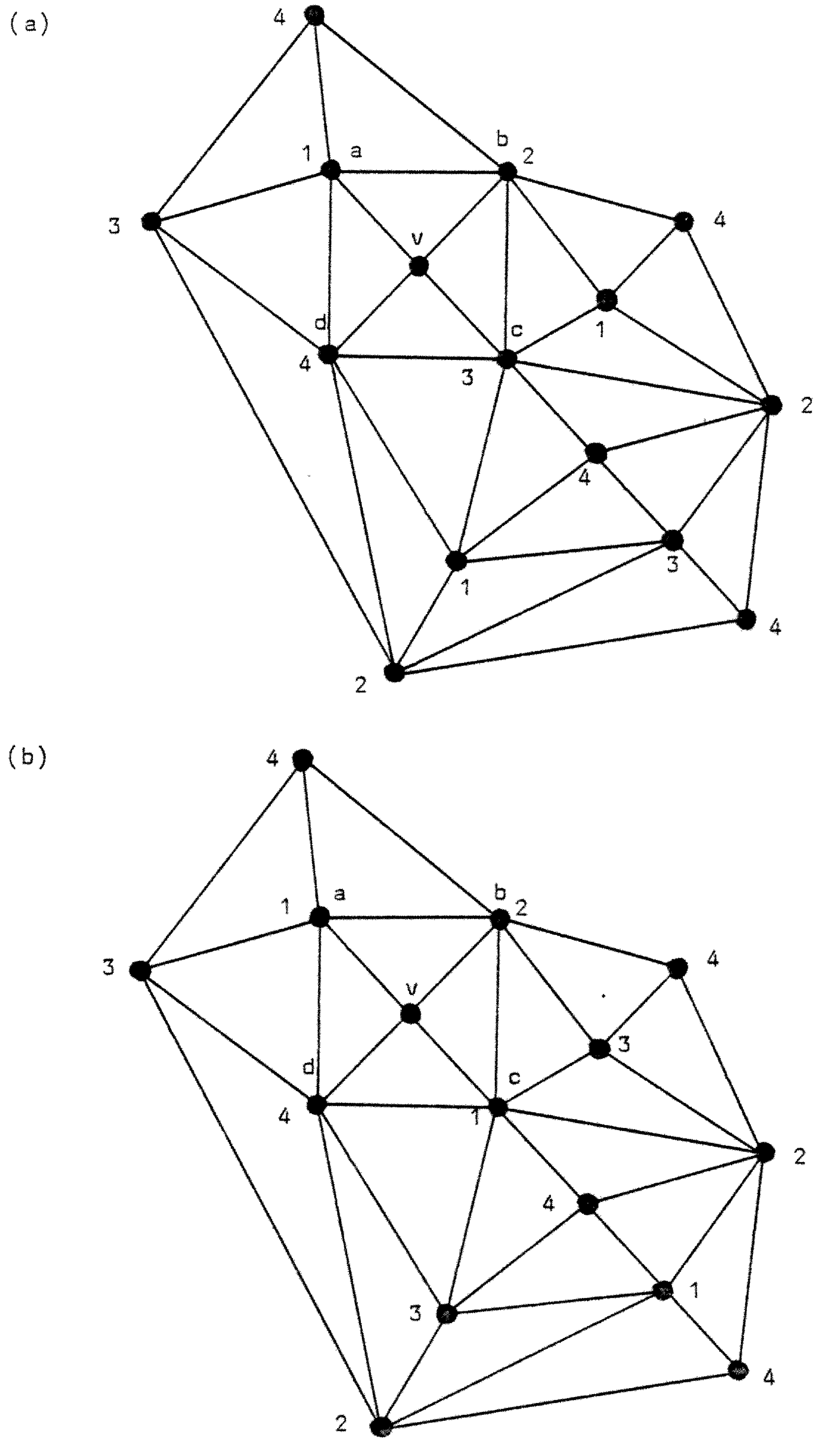


Abb. 3.5 3,1-Farbvertauschung bei c

so daß für v immer noch keine Farbe übrig geblieben wäre. Es ist wichtig festzuhalten, daß das Kempekettenargument kein Wissen über die globale Struktur des zu färbenden Graphen erfordert, obwohl die Farbvertauschung globale Auswirkungen hat.

4. G enthalte den vierten Graphen aus Abb. 3.2. Wie vorher entfernen wir die Ecke v - eine sogenannte 5-Ecke oder Pentagon -, erhalten dadurch den Graphen G', vierfärben G' und untersuchen die Färbung der Ecken a, b, c, d und e. Falls nur drei Farben benutzt werden, können wir v mit der vierten Farbe färben. Falls jedoch die Ecken a, b, c, d und e vier Farben verwenden, müssen wir wieder auf das Kempekettenargument zurückgreifen.

In diesem Fall müssen zwei der fünf Ecken die gleiche Farbe haben, und diese zwei können natürlich nicht benachbart sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir eine Farbverteilung wie in Abb. 3.6 gezeigt annehmen.

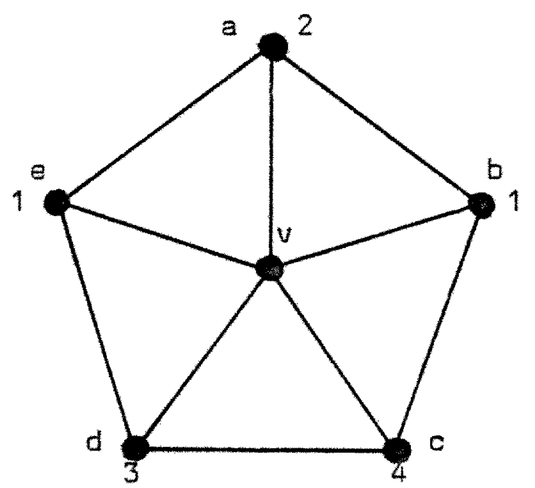
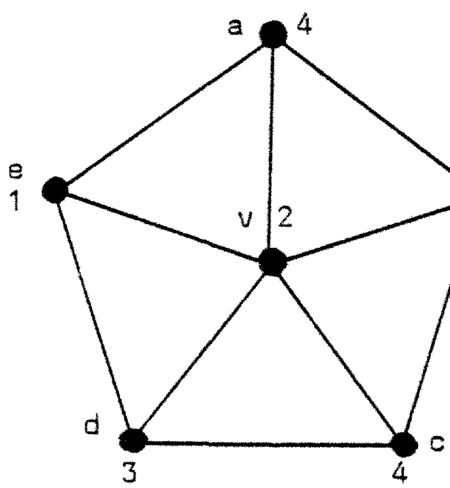


Abb. 3.6 Angenommene Farbverteilung

Gibt es keine 2,4-Kempekette von a nach c, dann können wir eine 2,4-Farbvertauschung von a aus vornehmen; die resultierende Farbverteilung zeigt Abb. 3.7, wobei v die Farbe 2 erhält. Gibt es keine 2,3-Kempekette von a nach d, dann können wir von a aus 2,3-vertauschen, mit der resultierenden Farbverteilung von Abb. 3.8.



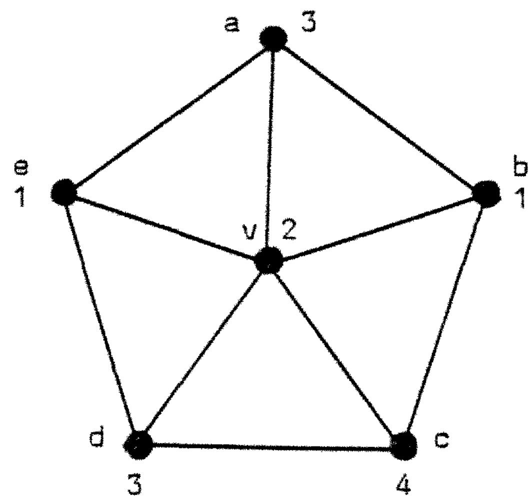


Abb. 3.7 Farbverteilungen Abb. 3.8

Unsere bisherigen Überlegungen haben uns gezeigt, daß unser minimales Gegenbeispiel G im Widerspruch zur Annahme vierfärbbar ist, wenn es entweder keine 2,4-Kempekette von a nach c oder keine 2,3-Kempekette von a nach d enthält. Also muß ein Gegenbeispiel beide Ketten enthalten.

Kempe unterschied die drei Fälle von Abb. 3.9. In allen drei Fällen kann man 1,3-vertauschen von b aus, ohne die Farbe von d zu ändern, denn es existiert keine 1,3-Kempekette von b nach d. In gleicher Weise kann man 1,4-vertauschen von e aus, ohne die Farbe von c zu ändern, denn es existiert keine 1,4-Kempekette von e nach c.

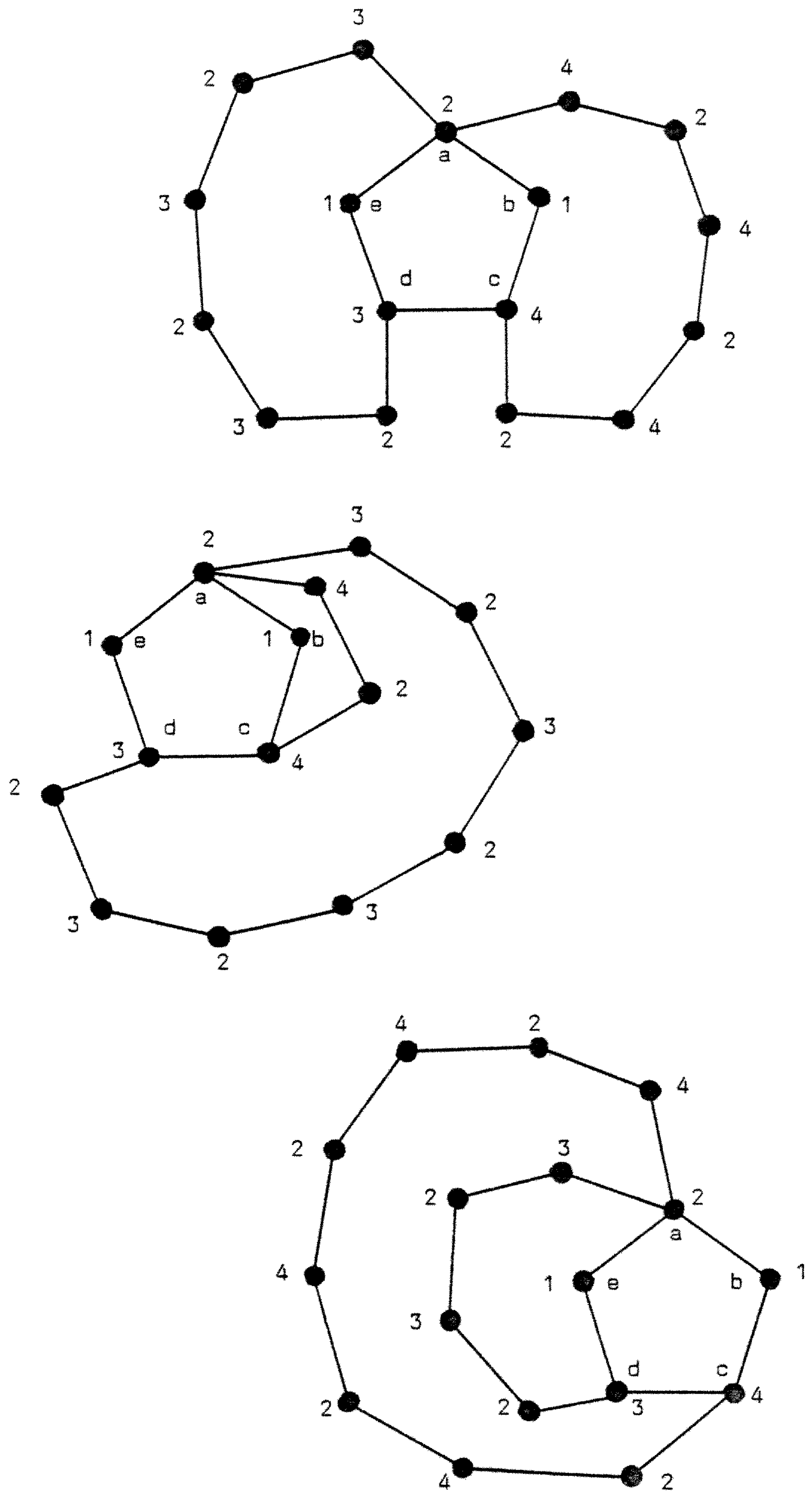


Abb. 3.9 Kempes Fallunterscheidung

Nun vertauschen wir die Farben 1 und 3 von b aus sowie die Farben 1 und 4 von e aus und erhalten die Farbverteilung von Abb. 3.10.

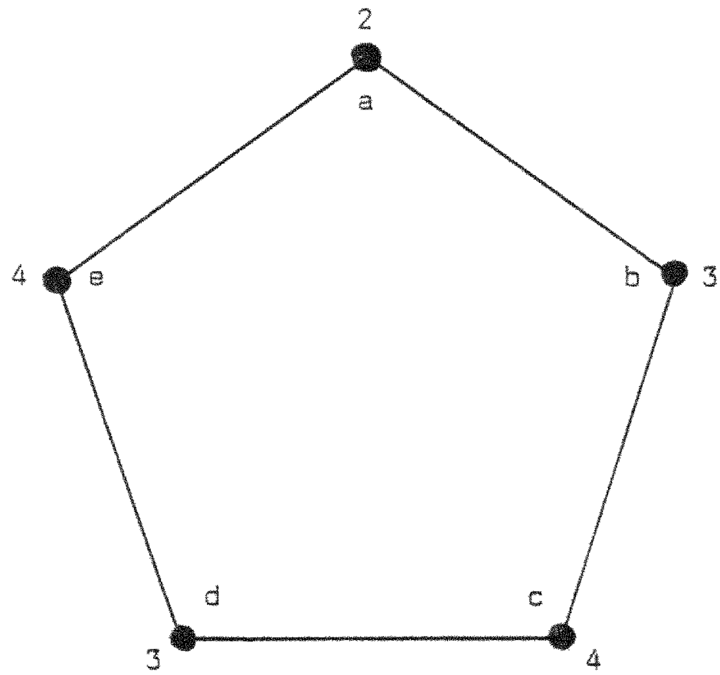


Abb. 3.10 Farbverteilung nach doppelter Farbvertauschung

Wir können jetzt die Ecke v mit der Farbe 1 färben. Somit ist unser Gegenbeispiel im Widerspruch zur Annahme vierfärbbar, und daraus folgt die Richtigkeit des Vierfarbensatzes, q.e.d.

3.2 Der Fünffarbensatz

1890, elf Jahre später, fand Heawood den Fehler in Kempes Beweis. Erinnern wir uns des letzten Falles aus Abschnitt 3.1; hierbei waren die Nachbarecken eines Pentagons v nach Entfernen desselben aus dem minimalen Gegenbeispiel G mit vier Farben gefärbt worden (Abb. 3.11).

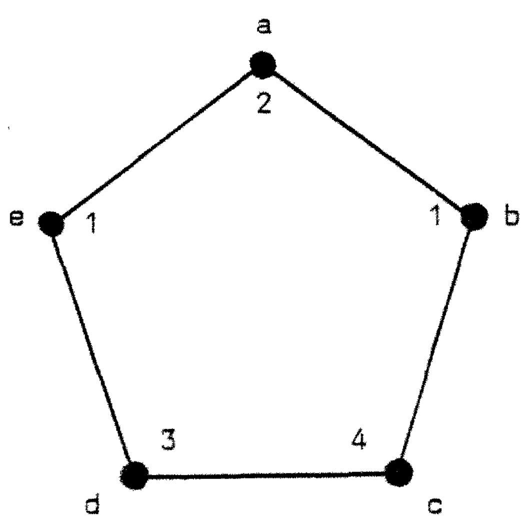


Abb. 3.11 Viergefärbte Umgebung eines Pentagons

Kempe hatte korrekt hergeleitet, daß es eine 2,4-Kempekette von a nach c und eine 2,3-Kempekette von a nach d geben muß, aber er untersuchte nicht den Fall, daß sich beide Ketten kreuzen (siehe Abb. 3.12 - ein geradezu klassischer Fehler: unvollständige Fallaufzählung, auf den wir noch öfter stoßen werden). Nun ist es immer noch möglich, die Farben 1 und 3 von b aus zu vertauschen, ohne die Farbe von d zu ändern. Doch dies könnte die 2,3-Kempekette von a nach d zerstören (Abb. 3.13). Wir haben also keine Garantie mehr, daß nach einer 1,4-Farbvertauschung von e aus die Ecke c immer noch die Farbe 4 haben wird.

Heawood versuchte diesen Fehler zu berichtigen, doch konnte

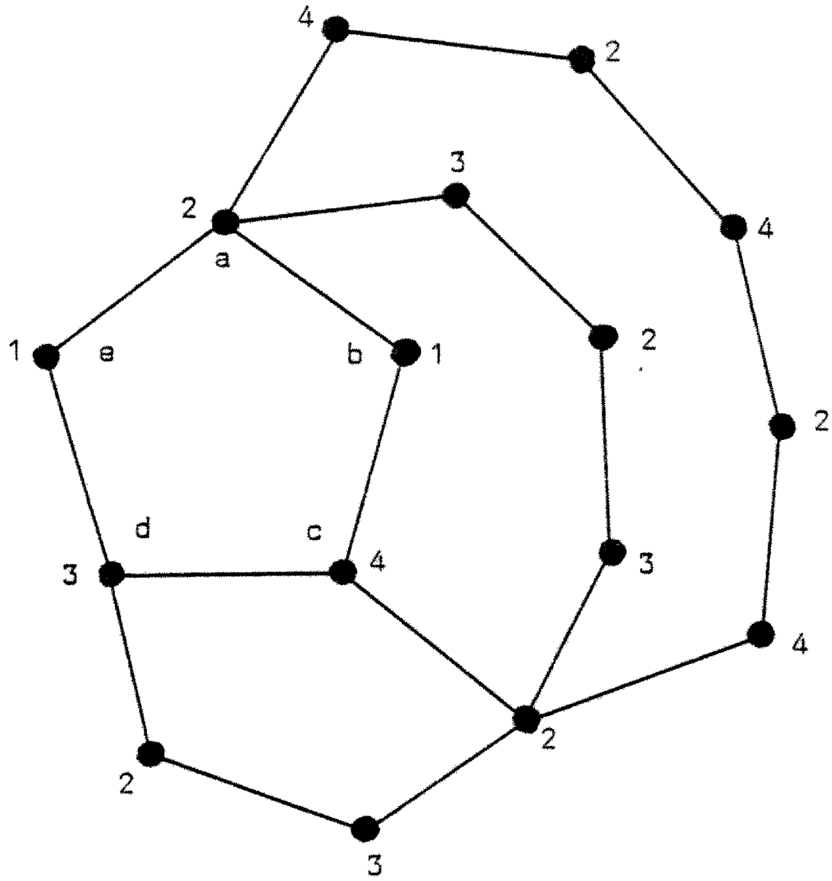


Abb. 3.12

Zwei sich kreuzende Kempeketten

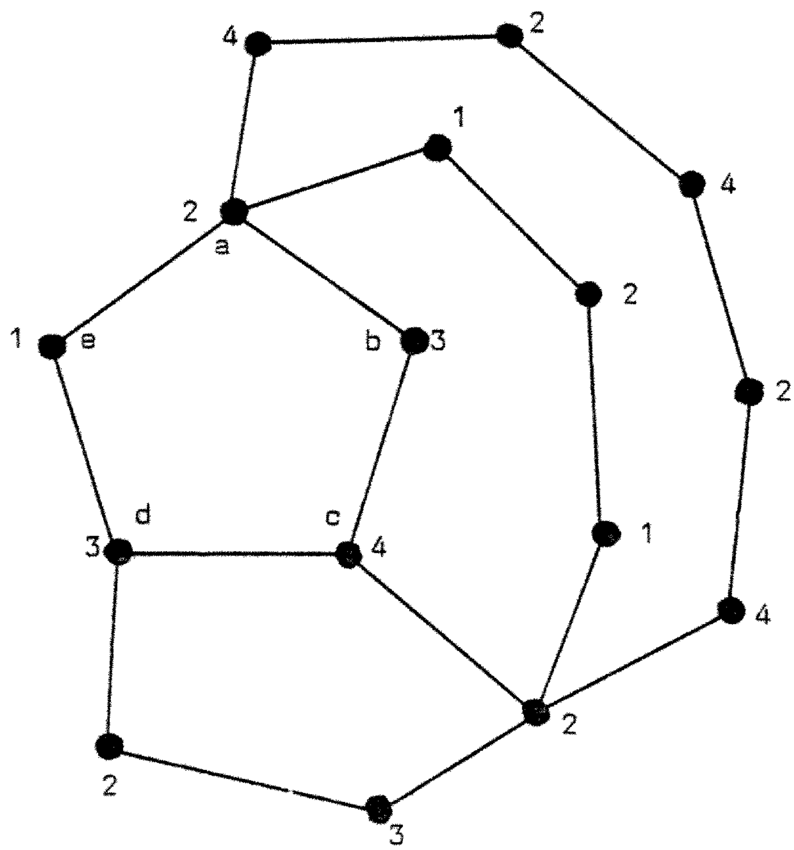


Abb. 3.13

Farbvertauschung zerstört Kempekette

er lediglich beweisen, daß jeder ebene Graph fünffärbbar ist.

Fünffarbensatz: Jeder ebene Graph ist fünffärbbar.

Beweis: Wie bei Kempes Beweis nehmen wir die Existenz eines Gegenbeispiels an. Dann gibt es auch ein minimales trianguliertes Gegenbeispiel G, das wie alle Triangulationen einen der Graphen aus Abb. 3.2 als Teilgraphen enthalten muß.

Kempe hat bereits bewiesen, daß die Annahme eines Gegenbeispiels zum Widerspruch führt, falls dieses eine Zweier-, Dreier- oder Viererecke enthält. Nehmen wir also an, G enthalte eine Fünferecke, das Pentagon v.

Entfernen wir v aus G, so erhalten wir einen neuen Graphen G', der fünffärbbar ist, da G ja eine minimales Gegenbeispiel war. Nun färben wir G' mit fünf Farben. Benutzen die Ecken a, b, c, d und e weniger als fünf Farben, dann können wir v wieder hinzufügen und mit einer der noch verbliebenen Farben färben.

Der einzige noch zu untersuchende Fall ist jener, in dem die Ecken a, b, c, d und e alle verschieden gefärbt sind (Abb. 3.14).

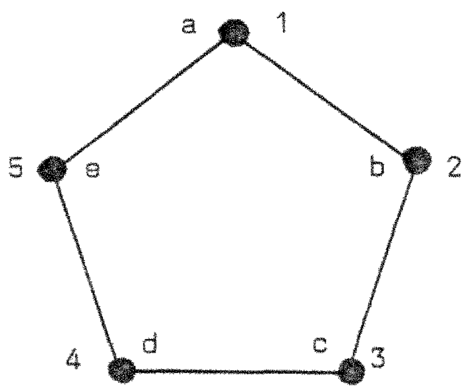


Abb. 3.14 Fünfgefärbte Umgebung eines Pentagons

G' kann nicht zugleich eine 1,3-Kempekette von a nach c und eine 2,4-Kempekette von b nach d enthalten. Daher können wir entweder die Farben 2 und 4 von b aus oder die Farben 3 und 1 von c aus vertauschen, und erhalten so eine Färbung von G', welche nur vier Farben für die Ecken a, b, c, d und e verwendet. Nun können wir die Ecke v wieder hinzufügen und sie mit der fünften Farbe färben, im Widerspruch zu unserer Annahme, q.e.d.