KAPITEL 2

BEGRIFFE UND DEFINITIONEN DER GRAPHENTHEORIE

In ihrer historischen Gestalt behauptet die Vierfarbenvermutung, daß jede Landkarte mit nur vier Farben so gefärbt werden kann, daß keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe haben. Unter "benachbarten" Ländern sind solche zu verstehen, die eine Teilstrecke der Grenzlinie gemeinsam haben; zwei Länder, die nur in einem einzigen Punkt oder in einer endlichen Anzahl von Punkten zusammentreffen (wie die Stücke eines Kuchens), sollen nicht als benachbart angesehen werden. Ferner soll jedes Land aus einem einfach zusammenhängenden Gebiet bestehen.

Bei dem Vierfarbenproblem können die Karten entweder in der Ebene oder auf der Oberfläche einer Kugel gezeichnet werden. Die beiden Fälle sind äquivalent: denn jede Karte auf der Kugel kann auf der Ebene dargestellt werden, indem man sich im Innern eines der Länder A ein kleines Loch gebohrt denkt und die verbleibende Oberfläche so deformiert, daß sie schließlich flach in einer Ebene liegt. Natürlich haben sich dabei die Flächen der Länder und die Winkel zwischen ihren Grenzlinien verändert. Aber diejenigen Länder, die vor der Deformation einander benachbart waren, sind es auch nach der Deformation, und diejenigen Länder, die vor der Deformation einander nicht benachbart waren, sind es auch nach der Deformation nicht. Die so entstandene ebene Karte ist dann die einer "Insel", die aus den übrigen Ländern besteht, umgeben von einem "Meer", das aus dem Land A besteht. Umgekehrt kann man, indem man diesen Vorgang rückgängig macht, jede derartige ebene Karte auch auf der Kugel darstellen. Wir können uns daher auf Karten auf der Kugel beschränken.

Die Färbung einer Landkarte ist eine Abbildung, die jedem Land der Landkarte eine Farbe so zuordnet, daß je zwei benachbarte Länder verschiedene Farben erhalten. Eine Landkarte G^* heißt n-färbbar, wenn es eine Färbung von G^* mit n oder weniger Farben gibt. Wir sind nun in der Lage, das Vierfarbenproblem zum Vierfarbensatz zu formalisieren (historisch gesehen zur Vierfarbenvermutung):

Vierfarbensatz: Jede ebene Landkarte ist vierfärbbar.

Es gibt eine Reihe zum Vierfarbensatz äquivalenter Sätze, aus deren Richtigkeit die Richtigkeit des Vierfarbensatzes folgt. (Die Umkehrung gilt allerdings nicht immer.) In der Tat bewiesen Appel und Haken den Vierfarbensatz nicht in der oben angeführten, sondern in einer äquivalenten graphentheoretischen Form. Die Beschäftigung mit einigen graphentheoretischen Grundlagen bleibt uns daher nicht erspart. Dieses Kapitel bringt allerdings nur solche Begriffe und Definitionen, deren Kenntnis zum Verstehen der Beweisführung notwendig ist. Die Terminologie stammt weitgehend aus dem Buch "Graphentheorie" von Frank Harary.

2.1 Definitionen

Ein Graph G besteht aus einer endlichen, nicht leeren Menge V von p Ecken zusammen mit einer gewissen Menge X von q zweielementigen Teilmengen von V. Jedes ungeordnete Paar $x = \{u, v\}$ $(u \neq v)$ von Ecken, das zu X gehört, ist eine Kante von G und man sagt, x verbindet u und v. Wir schreiben x = uv und sagen, daß u und v benachbart sind. Die Ecke u und die Kante x inzidieren miteinander, ebenso v und x. Wenn zwei verschiedene Kanten x und y mit einer gemeinsamen Ecke inzidieren, dann heißen sie benachbarte Kanten. Ein Graph mit p Ecken und q Kanten wird ein (p,q)-Graph genannt.

Es ist üblich, einen Graphen durch ein Diagramm darzustellen und sich darauf zu beziehen, als sei dies der Graph. So sind im Graphen von Abb. 2.1 die Ecken u und v benachbart, aber u und w sind es nicht; die Kanten x und y sind benachbart, aber nicht x und z. Obgleich sich die Kanten x und z im Diagramm schneiden, ist ihr Schnittpunkt keine Ecke des Graphen.

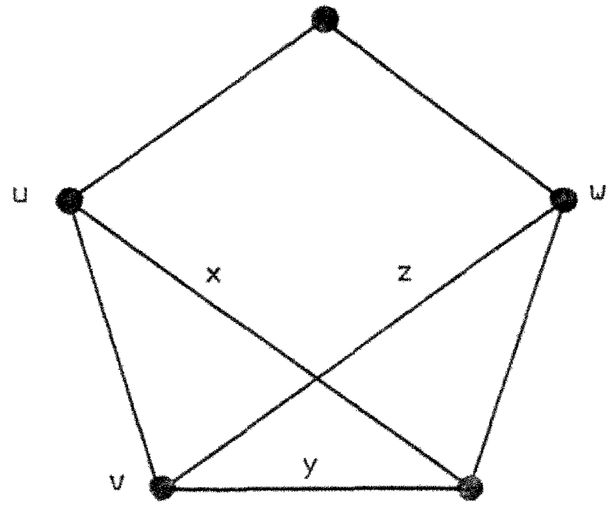


Abb. 2.1 Ein Graph zur Erläuterung der Relation benachbart

Eine *Schlinge* ist eine Kante, die eine Ecke mit sich selbst verbindet. Man beachte, daß die Definition eines Graphen keine Schlingen zuläßt. Sind zwei Ecken durch mehr als eine Kante miteinander verbunden, so nennt man diese Kanten *mehrfache Kanten*. Ein Graph, der mehrfache Kanten enthält, wird *Multigraph* genannt. Wenn sowohl Schlingen als auch mehrfache Kanten zugelassen werden, haben wir einen *Pseudographen*. Abb. 2.2 zeigt einen Multigraphen und einen Pseudographen mit dem gleichen "zugrunde liegenden Graphen", nämlich einem Dreieck.

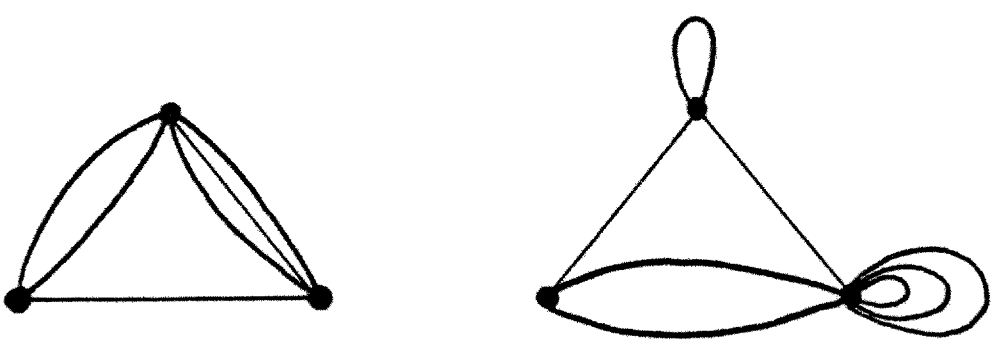


Abb. 2.2 Ein Multigraph und ein Pseudograph

Zwei Graphen sind *isomorph* (bezeichnet mit $G \cong H$), wenn eine bijektive Abbildung zwischen ihren Eckenmengen existiert, die die Relation "benachbart" enthält. Z.B. sind G_1 und G_2 von Abb. 2.3 isomorph, wie die Abbildung $v_i \leftrightarrow u_i$ zeigt.

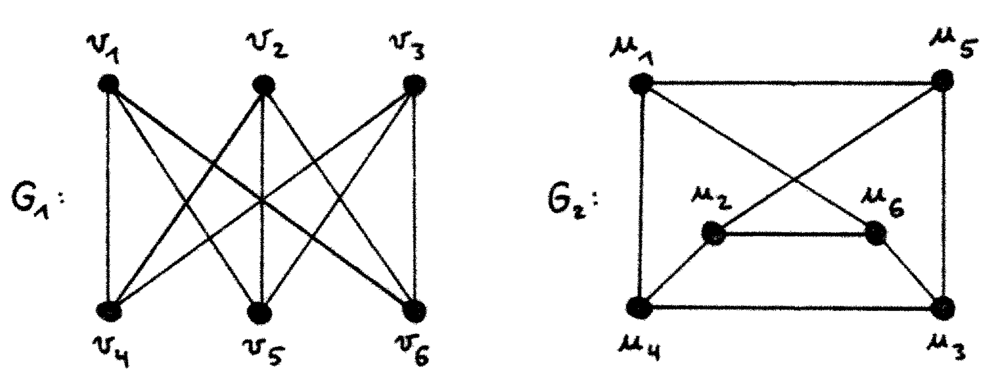


Abb. 2.3 Isomorphe Graphen

Ein Teilgraph eines Graphen G ist ein Graph, dessen Ecken und Kanten zu G gehören. Wenn G_1 ein Teilgraph von G ist, dann ist G Obergraph von G_1. Ein aufspannender Teilgraph von G ist ein Teilgraph, der alle Ecken von G enthält. In Abb. 2.4 ist G_2, aber nicht G_1 ein aufspannender Teilgraph von G.

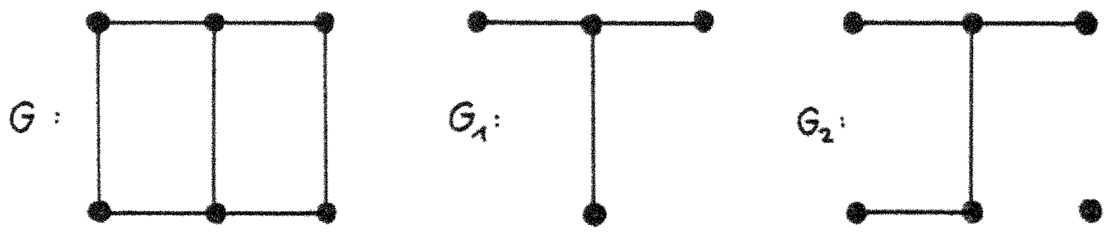


Abb. 2.4 Ein Graph und zwei Teilgraphen

Wenn G ein Graph ist, und x eine Kante von G, dann ist G - x der Graph, den wir erhalten, wenn wir x aus G entfernen. Wenn v eine Ecke von G ist, dann ist G - v der Graph, den wir erhalten, wenn wir v und alle mit v inzidierenden Kanten aus G entfernen. Falls also G der Graph aus Abb. 2.1 ist, dann ist G - x der Graph von Abb. 2.5 (a), und G - u ist der Graph aus Abb. 2.5 (b).

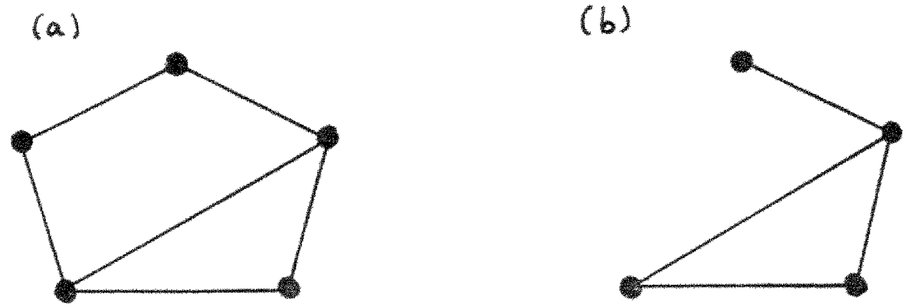


Abb. 2.5

2.2 Kantenfolgen und Zusammenhang

Eine der elementarsten Eigenschaften, die ein Graph besitzen kann, ist der Zusammenhang. In diesem Abschnitt entwickeln wir die grundlegende Struktur zusammenhängender und unzusammenhängender Graphen.

Eine Kantenfolge eines Graphen ist eine alternierende Folge von Ecken und Kanten v_0, x_1, v_1, ..., v_{n-1}, x_n, v_n, die mit je einer Ecke beginnt und endet, und in welcher jede Kante mit den beiden verschiedenen Ecken inzidiert, die in der Folge unmittelbar neben ihr stehen. Diese Kantenfolge verbindet v_0 mit v_n und kann auch mit $v_0v_1v_2...v_n$ bezeichnet werden (die Kanten sind aus dem Zusammenhang klar); sie wird manchmal auch eine v_0,v_n-Kantenfolge genannt. Sie ist geschlossen, wenn $v_0 = v_n$ ist, und sonst offen. Sie ist ein Kantenzug, wenn alle Kanten verschieden sind, und ein Weg, wenn alle Ecken (und somit erst recht alle Kanten) verschieden sind. Wenn die Kantenfolge geschlossen ist, heißt sie ein Kreis, vorausgesetzt ihre n Ecken v_1, v_2, ..., v_n sind verschieden und $n \geq 3$.

In dem Graphen von Abb. 2.6 ist $v_1v_2v_5v_2v_3$ eine Kantenfolge, die kein Kantenzug ist, und $v_1v_2v_5v_4v_2v_3$ ist ein Kantenzug, der kein Weg ist; $v_1v_2v_5v_4$ ist ein Weg und $v_2v_4v_5v_2$ ist ein Kreis.

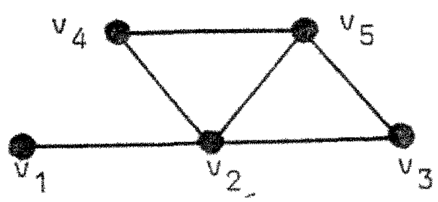


Abb. 2.6 Ein Graph zur Erläuterung von Kantenfolgen

Wir bezeichnen mit C_n einen Graphen, der aus einem Kreis mit n Ecken besteht, und mit P_n einen Weg mit n Ecken; C_3 wird oft ein Dreieck genannt.

Ein Graph ist zusammenhängend, wenn je zwei Ecken durch einen Weg verbunden sind, andernfalls ist er nicht zusammenhängend. Der Graph von Abb. 2.7 ist nicht zusammenhängend.

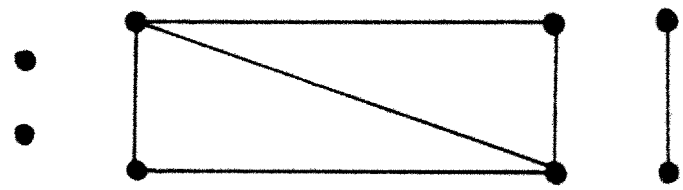


Abb. 2.7

Kann ein Graph G durch Entfernen von n - 1 Ecken nicht un- zusammenhängend gemacht werden, so nennt man ihn n-zusammenhängend. Der Graph von Abb. 2.8 ist 2-zusammenhängend, aber nicht 3-zusammenhängend.

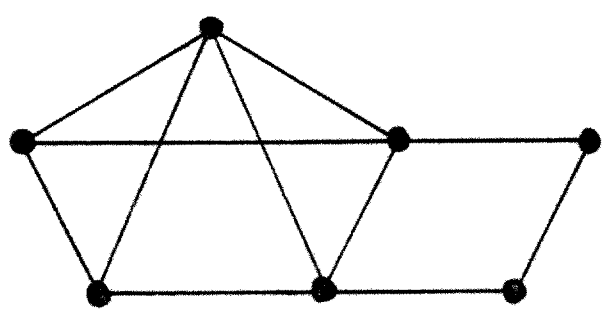


Abb. 2.8

Eine Artikulation eines Graphen ist eine Ecke, deren Entfernung einen zusammenhängenden Graphen unzusammenhängend macht. In Abb. 2.9 ist v eine Artikulation, aber w nicht.

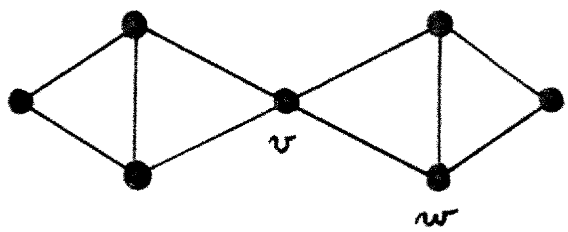


Abb. 2.9

Der Grad einer Ecke v_i im Graphen G, bezeichnet mit grad v_i, ist die Anzahl der mit v_i inzidierenden Kanten. Da jede Kante mit zwei Ecken inzidiert, trägt sie den Wert 2 zur Summe der Grade der Ecken bei. Wir haben so ein von Euler gefundenes Ergebnis, welches der erste Satz der Graphentheorie war.

Satz 2.1: Die Summe der Grade der Ecken des (p,q)-Graphen G ist gleich der doppelten Anzahl der Kanten:

$$\sum_{i=1}^{p} \text{grad } v_i = 2q$$

Es ist bequem, für Ecken mit kleinem Grad Namen zu haben. Die Ecke v ist isoliert, wenn grad v = 0 ist; sie ist eine Endecke, wenn grad v = 1 ist. Ecken höheren Grades bezeichnen wir auch mit 2-Ecke, 3-Ecke usw.

Ein Graph ist kreislos, wenn er keinen Kreis enthält. Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Abb. 2.10 gibt drei Beispiele für Bäume.

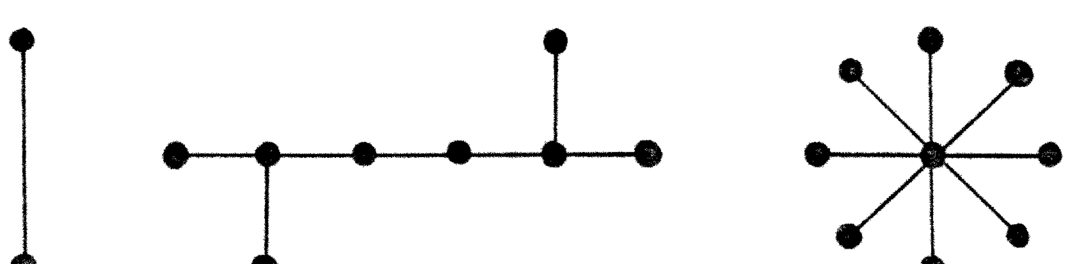


Abb. 2.10

Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Satz, den wir später zum Beweis der Eulerschen Polyederformel verwenden werden.

Satz 2.2: Für einen Baum mit p Ecken und q Kanten gilt

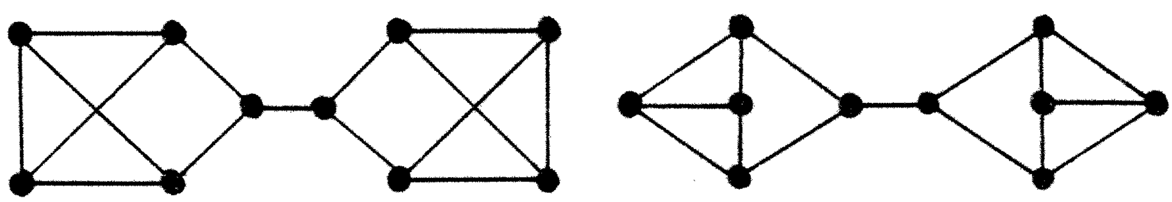
$$p = q + 1$$

Beweis: Nach Definition ist ein Baum ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Wir beweisen $p = q + 1$ durch Induktion. Dies gilt offensichtlich für Bäume mit ein oder zwei Ecken. Setzen wir voraus, daß es für alle Bäume mit weniger als p Ecken gilt. Der Baum G habe p Ecken. Durch Entfernen einer beliebigen Kante von G wird G unzusammenhängend, da je zwei Ecken von G durch genau einen Weg verbunden sind. Der so entstandene neue Graph besteht aus genau zwei Bäumen. Nach Induktionsannahme hat jeder dieser Bäume um eins mehr Ecken als Kanten. Somit muß die gesamte Anzahl von Kanten in G gleich $p - 1$ sein, q.e.d.

2.3 Ebene Graphen

In diesem Abschnitt betrachten wir die geometrische Darstellung von Graphen auf Oberflächen beliebiger Körper. Dabei benutzen wir die Begriffe "Ecken" und "Kanten" für abstrakte Graphen und "Punkte" und "Linien" für ihre geometrische Darstellung.

Sei S die Oberfläche eines beliebigen Körpers. Dann heißt ein Graph G in die Fläche S <u>eingebettet</u>, wenn er so auf S gezeichnet ist, daß sich keine zwei Linien schneiden. Ein Graph ist <u>plättbar</u>, wenn er in die Ebene eingebettet werden kann; ein <u>ebener</u> Graph ist bereits in die Ebene eingebettet. Zum Beispiel ist der Graph von Abb. 2.11 (a) plättbar, da er zu dem ebenen Graphen in Abb. 2.11 (b) isomorph ist.



(a) (b)

Abb. 2.11 Ein plättbarer Graph und eine Einbettung

Wie die geometrische Darstellung veranschaulicht, zerteilt ein ebener Graph die Ebene in mehrere <u>Gebiete</u>, wobei das unbeschränkte Gebiet auch <u>äußeres Gebiet</u> genannt wird. Der ebene Graph von Abb. 2.12 hat drei Gebiete, f_1, f_2 und das Außengebiet f_3. Von diesen ist nur f_2 durch einen Kreis begrenzt.

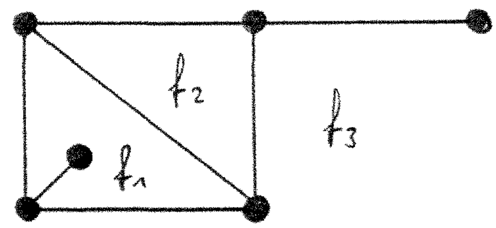


Abb. 2.12 Ein ebener Graph

Im Jahre 1736 begründete Euler die topologische Graphentheorie, indem er bewies, daß für jedes sphärische Polyeder mit V Ecken, E Kanten und F Flächen $V - E + F = 2$ gilt. Da wir zum Beweis des Vierfarbensatzes ausschließlich ebene Graphen betrachten werden, wollen wir nun die Eulersche Polyederformel in ihrer Formulierung für ebene Graphen beweisen.

Satz 2.3 (Eulersche Polyederformel für ebene Graphen): Für jeden zusammenhängenden, ebenen Graphen mit p Ecken, q Kanten und r Gebieten gilt

$$p - q + r = 2.$$

Beweis: Wir beweisen die Eulersche Formel wieder durch Induktion. Sei G ein zusammenhängender, ebener Graph mit p Ecken, q Kanten und r Gebieten. Falls G ein Baum ist, so gilt $p = q + 1$; dies war die Aussage von Satz 2.2. Da andererseits ein Baum nur ein Gebiet hat, sein Außengebiet nämlich, gilt für Bäume $r = 1$. Also gilt die Eulersche Formel für Bäume.

Falls G kein Baum ist, dann können wir, da G nach Voraussetzung zusammenhängend ist, eine Kante nach der anderen entfernen, bis wir einen Baum erhalten (Abb. 2.13).

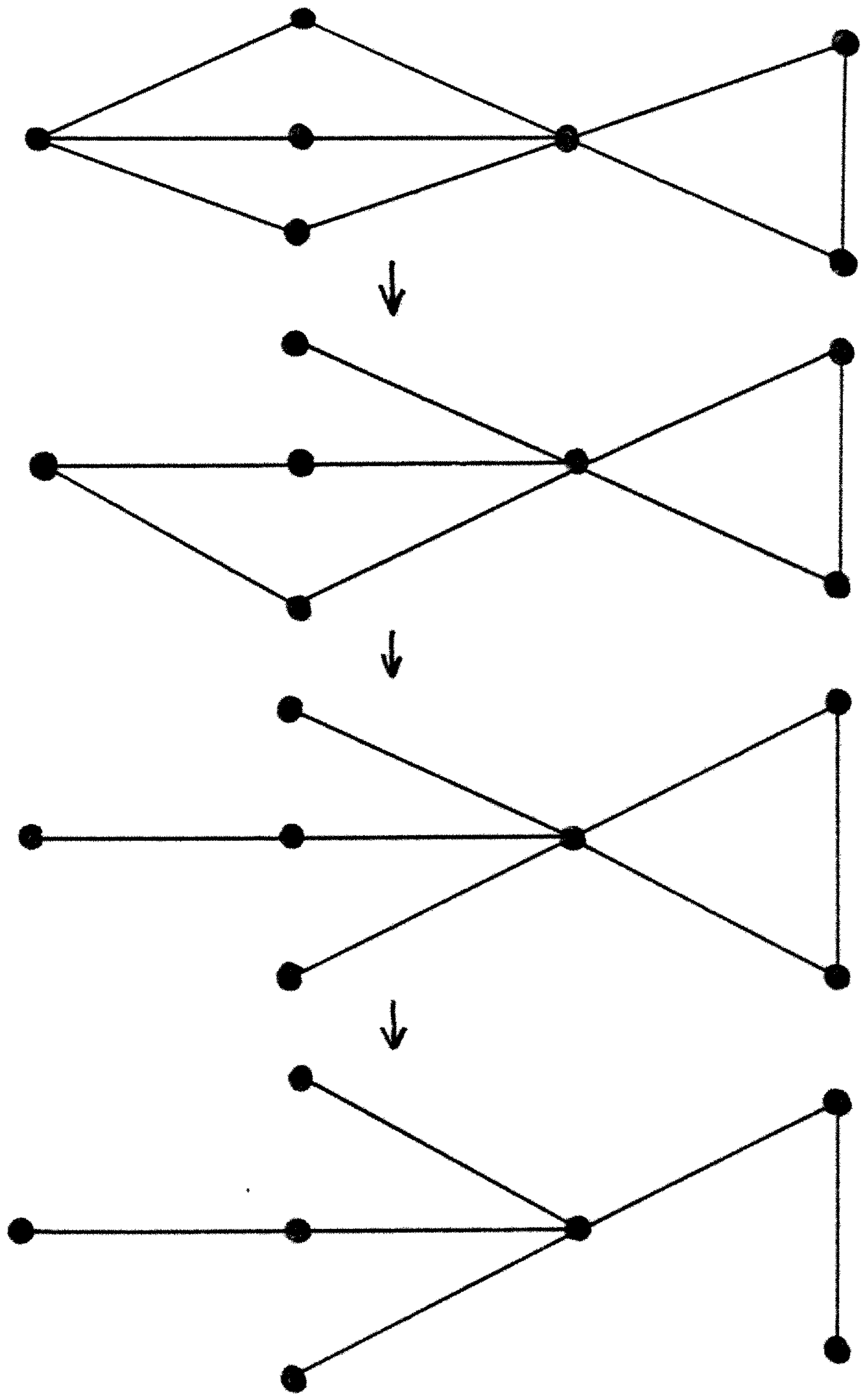


Abb. 2.13

Jedesmal, wenn wir eine Kante entfernen, vermindern wir die Anzahl der Gebiete um 1. Wenn wir nun x Kanten entfernen mußten, um aus G einen Baum zu machen, dann hat der Baum p Knoten, q - x Kanten und r - x Gebiete. Da wir schon wissen, daß die Eulersche Formel für Bäume gilt, erhalten wir

$$p - (q - x) + r - x = 2 ,$$

und damit $$p - q + r = 2 , \text{ q.e.d.}$$

Die Eulersche Formel läßt sich nicht nur auf die Ebene, sondern auch auf andere Oberflächen anwenden. Allgemein gilt

$$p - q + r = 2 - 2g$$

(ohne Beweis), wobei die Zahl $2 - 2g$ die Eulersche Charakteristik der Fläche ist und die Zahl g das Geschlecht der Fläche. Das Geschlecht einer Fläche ist definiert als die größte Anzahl von sich nicht schneidenden, einfachen geschlossenen Kurven, die man auf der Fläche zeichnen kann, ohne sie zu zerlegen. Danach ist das Geschlecht der Kugel 0, das des Torus 1, das der Brezel 2 usw. Ein Graph hat das Geschlecht n, falls er in eine Fläche mit dem Geschlecht n eingebettet werden kann, aber nicht in eine Fläche niedrigeren Geschlechts. Ein ebener Graph hat das Geschlecht 0, da jeder Graph, der in die Kugeloberfläche eingebettet werden kann, auch in die Ebene eingebettet werden kann, und umgekehrt.

Der nicht plättbare Graph $K_{3,3}$ (Abb. 2.14) hat das Geschlecht 1, da er sich in die Oberfläche eines Torus einbetten läßt (Abb. 2.15), nicht aber in eine Kugeloberfläche.

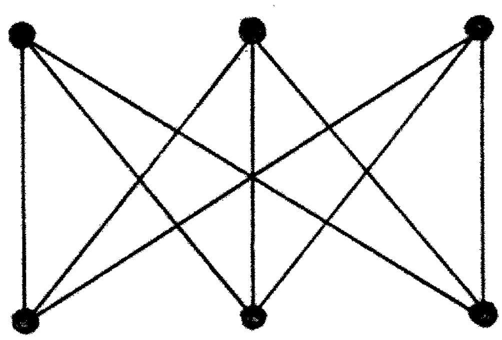


Abb. 2.14 Der nicht plättbare Graph $K_{3,3}$

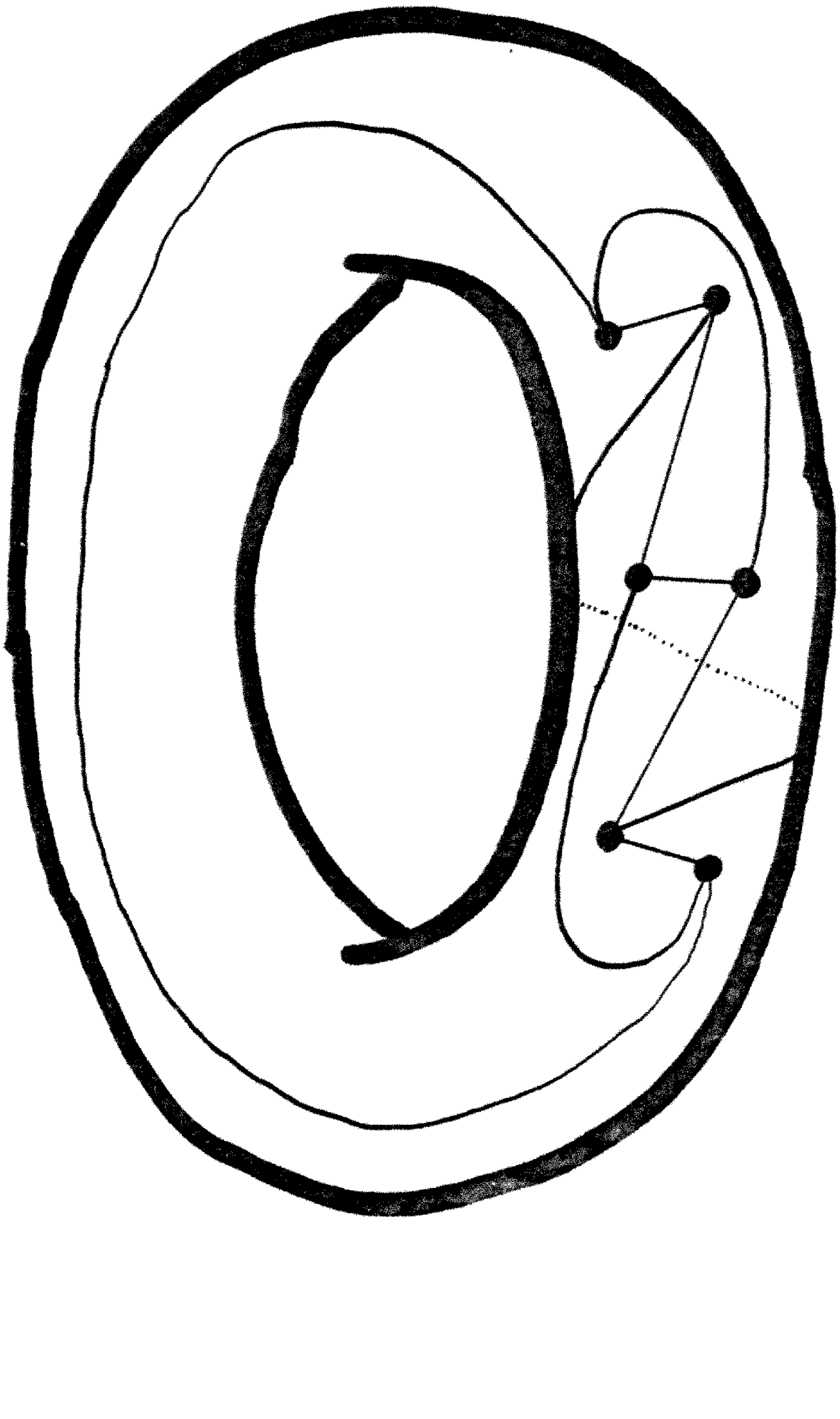


Abb. 2.15

Die vielleicht frustierendste Tatsache beim Vierfarbenproblem ist die relative Leichtigkeit, mit der sich das entsprechende Ergebnis bei Graphen höheren Geschlechts erzielen läßt. So ist schon lange bekannt, daß sechs Farben für das Möbiussche Band und für die Kleinsche Flasche notwendig und hinreichend sind, während es beim Torus sieben Farben sind.

Um die Äquivalenz zwischen der ursprünglichen und der graphentheoretischen Formulierung des Vierfarbensatzes zeigen zu können, benötigen wir noch den Begriff des "geometrisch Dualen". Zu einem ebenen Graphen G wird sein <u>geometrisch dualer Pseudograph</u> oder sein <u>geometrisch Duales</u> G^* auf folgende Weise konstruiert: man zeichne in jedes Gebiet von G (einschließlich des Außengebietes) einen Punkt, und wenn zwei Gebiete längs einer Linie aneinandergrenzen, verbinde man die entsprechenden Punkte durch eine Linie x^*, die nur x schneidet. Das Ergebnis ist immer ein Pseudograph, wie in Abb. 2.16 dargestellt, wo G die ausgezogenen Linien und sein Duales G^* die gestrichelten Linien enthält.

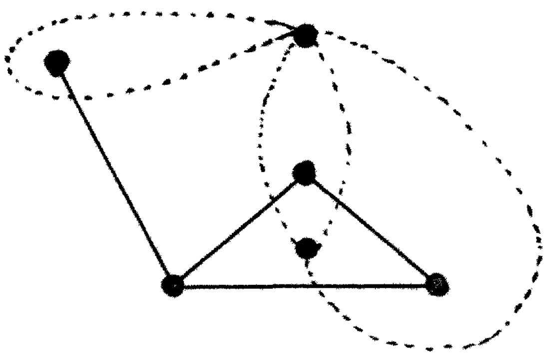


Abb. 2.16 Ein ebener Graph und sein geometrisch Duales

Nach Definition ist das geometrisch Duale eines zusammenhängenden, ebenen Graphen G auch eben, und es folgt, daß das Duale des Dualen von G der ursprüngliche Graph G ist.

Am Anfang dieses Kapitels haben wir die Färbung einer Landkarte definiert und dann den Vierfarbensatz formuliert.

Vierfarbensatz: Jede ebene Landkarte ist vierfärbbar.

Wenn wir nun die Färbung eines Graphen definieren als eine Abbildung, die jeder Ecke des Graphen eine Farbe so zuordnet, daß je zwei benachbarte Ecken verschiedene Farben erhalten, dann lautet das graphentheoretische Äquivalent zum obigen Satz:

Vierfarbensatz (4FS): Jeder plättbare Graph ist vierfärbbar.

Um die Äquivalenz beider Sätze einzusehen, nehmen wir die Gültigkeit des 4FS an, und sei G^* irgendeine ebene Landkarte. Sei G das geometrisch Duale von G^*. Da zwei Länder von G^* genau dann benachbart sind, wenn die entsprechenden Ecken von G benachbart sind, ist die Landkarte somit vierfärbbar, da der Graph G vierfärbbar ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, jede ebene Landkarte sei vierfärbbar, und sei H irgendein plättbarer Graph. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir H als zweifach zusammenhängenden, ebenen Graphen voraussetzen. Das Duale H^* von H sei so gezeichnet, daß jedes Gebiet von H^* genau einen Punkt von H einschließt. Der zusammenhängende, ebene Multigraph H^* kann in einen ebenen Graphen H' umgewandelt werden, indem man auf jede Linie aus einer Menge mehrfacher Linien einen neuen Punkt setzt. Die Vierfärbbarkeit der Landkarte H' liefert nun die Vierfärbbarkeit von H, womit der Nachweis der Äquivalenz erbracht ist.

Zum Schluß wollen wir noch die sogenannten maximal ebenen Graphen oder Triangulationen betrachten. Ein zusammenhängender, ebener Graph G heißt maximal eben oder triangular, wenn zu G keine Kante mehr hinzugefügt werden kann, ohne die Bedingung der Ebenheit zu verletzen. Offensichtlich sind alle Gebiete eines solchen Graphen dreieckig, also von genau drei Kanten begrenzt (daher auch der Name Triangulation).

Wir werden in den folgenden Kapiteln nur noch mit Triangulationen arbeiten, da die Färbung maximal ebener Graphen nur schwerer sein kann als die Färbung ebener Graphen, nicht aber leichter. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Zahl der paarweise benachbarten Ecken in einer Triangulation höher ist als in einem nicht triangularen ebenen Graphen der gleichen Eckenzahl; andererseits bleiben die schon bestehenden Nachbarschaftrelationen auch bei einer Triangulierung erhalten.

Wenn wir daher den Vierfarbensatz für alle Triangulationen bewiesen haben, so haben wir ihn ohne Beschränkung der Allgemeinheit für alle plättbaren Graphen bewiesen.