LEHRGEBIET ALLGEMEINE ELEKTROTECHNIK

UND DATENVERARBEITUNG

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Professor Dr.-Ing. Otto Lange

Ü B E R P R Ü F U N G D E S B E W E I S E S

F Ü R D E N V I E R F A R B E N S A T Z

Diplomarbeit

von

Ulrich Schmidt

Matr.-Nr. 066040

Betreuer: Professor Dr.-Ing. Otto Lange

Aachen, Mai 1982

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1

EINFÜHRUNG

Nach Bertrand Russell besitzt Mathematik nicht nur Wahrheit, sondern auch höchste Schönheit, vergleichbar der kalten und strengen Schönheit einer Skulptur. Diese Schönheit entfaltet sich nicht nur unmittelbar anschaulich in der Regelmäßigkeit geometrischer Figuren, sondern auch in der Art, in der ein Mathematiker Definitionen aufstellt und Sätze herleitet: all dies geschieht nach strengen logischen Regeln, ohne die Zuhilfenahme der Sinne, und ohne daß die bei Experimenten unvermeidlichen Toleranzen und Meßfehler das Ergebnis beeinflussen könnten.

Es darf bezweifelt werden, ob Russell heute noch an seiner Aussage festhalten würde. Der Computer, der seit etwa dreißig Jahren auch in der mathematischen Forschung verwendet wird, könnte durchaus der Mathematik in Teilgebieten einen experimentellen Charakter geben. Mit Hilfe des Computers wurden bedeutende Ergebnisse in der Gruppentheorie gewonnen, es wurden sehr große Primzahlen untersucht (z.B. im Zusammenhang mit Fermats letztem Satz), und nicht zuletzt wäre auch der Beweis des Vierfarbensatzes in seiner jetzigen Form ohne maschinelle Hilfe nicht möglich gewesen.

Der Computer ist nicht bloß ein weiteres Werkzeug neben anderen: die mit seiner Hilfe gewonnenen Ergebnisse lassen sich nicht gedanklich nachvollziehen. Dabei kann das Computerprogramm durchaus trivial sein (und die Prüfung auf Teilbarkeit <u>ist</u> trivial), es ist die große Menge der auszuführenden Einzelschritte, die einen gedanklichen Nachvollzug unmöglich macht. Es ist ein leichtes nachzuprüfen, daß 23 eine Primzahl ist. Mit Bleistift und Papier sowie einigen Minuten Zeit hat man sich schnell davon überzeugt, daß 23 nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Anders sieht es schon bei der Zahl $2^{31}-1$ $= 2\ 147\ 483\ 649$ aus. Aber auch hier könnte man sich zur Not mit Bleistift und Papier sowie etlichen Wochen Zeit davon überzeugen, daß $2^{31}-1$ prim ist (natürlich nur, wenn man sich nicht dabei verrechnet!). Bei $2^{10000}-1$ reicht die Lebenszeit eines Menschen nicht aus, um manuell zu entscheiden, ob diese Zahl prim ist oder nicht.

Und eben hier bekommt die Russelsche Skulptur ihre Risse. Denn Computerergebnisse sind Information aus zweiter Hand; schlimmer noch, Computer gehorchen nicht nur den Gesetzen der Logik, sondern unterliegen Störeinflüssen, ganz wie eine Meßapparatur in einem naturwissenschaftlichem Experiment. Dürfen wir deshalb die vom Computer errechnete Primzahl auch wirklich als prim ansehen? Oder in unseren Zusammenhang übertragen: dürfen wir das Vierfarbenproblem als gelöst ansehen? Im letzten Kapitel werden wir solche Fragen allgemein diskutieren sowie die Auswirkungen computergestützter Beweise auf die Mathematik und auf die Philosophie der Mathematik untersuchen.

Die vorliegende Arbeit stellt den Versuch dar, einen - allerdings wichtigen - Teil des Beweises von Appel und Haken für den Vierfarbensatz unabhängig von den Autoren zu verifizieren. Dies geschieht maschinell, mit Hilfe eines in einer hohen Programmiersprache geschriebenen Computerprogramms. Eine maschinelle Überprüfung empfahl sich wegen der außerordentlich großen kombinatorischen Komplexität des Beweises (bei vergleichsweise einfacher Beweislogik). Zusätzlicher Ansporn waren einige von Hand gefundene Fehler, die Haken bereits zu einer noch unveröffentlichten Beweiskorrektur veranlaßt haben.

Leider ließ der zeitlich begrenzte Rahmen dieser Arbeit keine umfassendere Überprüfung des Beweises zu, doch sollte es dem interessierten Leser leicht fallen, die hier vorgestellten Testtechniken auf andere Beweisteile auszudehnen. Das Programm ist modular aufgebaut und kann daher für solche Zwecke ohne größere Modifikationen verwendet werden.

Bevor wir uns den Details der Testalgorithmen zuwenden, müssen wir uns jedoch zuerst die theoretischen Grundlagen des Beweises erarbeiten. Dazu beginnen wir mit einem Gang durch die Geschichte. Auf Kempes Beweisversuch aus dem neunzehnten Jahrhundert basieren einige zentrale Ideen des Appel/Hakenschen Beweises; daher ist eine Darlegung seiner Beweisidee und der Gründe für ihr letztliches Scheitern erforderlich.

Kempes Beweisversuch führt uns zur Reduktionstheorie. Auf dieses Gebiet konzentrierten sich die meisten der Mathematiker, die das Vierfarbenproblem lösen wollten, von Birkhoff bis Heesch. Heesch hat im Laufe der Zeit mehrere tausend Figuren reduziert und veröffentlicht. Wir werden uns jedoch nur so weit wie nötig mit der Reduktionstheorie befassen, da sie nicht zentraler Bestandteil des zur Überprüfung ausgewählten Beweisteiles ist.

Wichtiger für diese Untersuchung sind hingegen die Begriffe der "unvermeidlichen Menge" und der "Entladungsprozedur". Insbesondere der Begriff der Entladungsprozedur erlaubt eine Verallgemeinerung derart, daß alle bisherigen Beweisversuche deshalb fehlgeschlagen sind, weil ihnen eine "ungeeignete" Entladungsprozedur zugrunde lag. Diese Betrachtungsweise erlaubt sogar den Vergleich zwischen Kempes Beweisversuch und dem Appel/Hakenschen Beweis unter demselben Kriterium.

Nachdem wir einige einfache Entladungsprozeduren als Fallbeispiele durchgerechnet haben, betrachten wir die Appel/Hakensche Entladungsprozedur in ihren Einzelheiten. Anschliessend wird das Programm vorgestellt, welches den ersten der beiden Teile eben dieser Entladungsprozedur überprüft. Mehrere Algorithmen greifen hier ineinander: einer zur Entdeckung von Subgraphenisomorphie bei maximal ebenen Graphen, ein anderer zur Feststellung, ob zwei gegebene Graphen einander "überlappen" (diese Begriffe werden noch genauer definiert).

Zum Schluß diskutieren wir die Resultate der Testläufe und behandeln die Problematik von Beweisen, die mit maschineller Hilfe durchgeführt werden.

Zunächst jedoch müssen wir uns in Kapitel 2 einiges graphentheoretisches Handwerkszeug aneignen.